On admet la

Proposition Si $\gamma : [a,b] \to M$ est un chemin de classe C^1 par morceaux dans une variété riemannienne (M,g) tq.

$$\ell(\gamma) = d(\gamma(a), \gamma(b))$$

Alors γ est une géodésique de classe C^2 (après reparamétrisation éventuelle).

(c'est une conséquence du lemme de Gauss, voir la prop. 3.9.1 dans les notes de cours ou les notes de P. Buser p. 69-70).

Déf (a) Une géodésique $\gamma : I \to (M,g)$ est **maximale** si pour toute géodésique $\tilde\gamma : \tilde I \to M$ t.q. $I \subset \tilde I$ et $\gamma = \tilde\gamma|_I$, alors $\gamma = \tilde\gamma$ et $I = \tilde I$.

(b) Une géodésique $\gamma : I \to M$ est **complète** si $I = \mathbb{R}$

(c) (M,g) est **géodésiquement complète** si toute géodésique maximale est complète.

Proposition (pré-Hopf-Rinow) Soit (M,g) une variété riemannienne et $p \in M$. On suppose que toute géodésique maximale issue de p est complète. Alors $Q \subset M$ fermé, non vide. Alors il existe une géodésique reliant p à Q de longueur $d = \mathrm{dist}(p, Q)$

il existe $\gamma : [0,d] \to M$, $\gamma(0) = p$, $\gamma(d) \in Q$

et $\ell(\gamma) = d = \mathrm{dist}(p, Q) = \inf\{d(p,q) \mid q \in Q\}$

Contre-Exemple Si il existe des géodésiques non complète (et maximale) issue de p

$M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et $p = (-1, 0)$, $q = (+1, 0)$

Preuve On remarque d'abord que l'hypothèse dit que $\exp_p$ est définie sur T_pM.

Soit $i(p)=$ rayon d'injectivité, $d=\mathrm{dist}(p,Q)$ et on choisit ε t.q.

$$0<\varepsilon<\min\{i(p), d\}$$

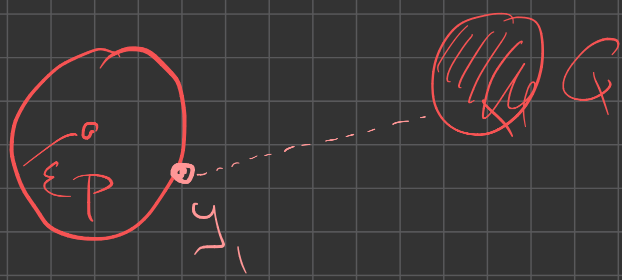
Alors l'exponentielle définit un difféomorphisme

$$\exp_p:\{v\in T_pM \mid \|v\|\leq\varepsilon\}\to\overline{B(p,\varepsilon)}=\{x\in M / d(p,x)\leq\varepsilon\}$$

(par définition du rayon d'injectivité).

Par continuité de la fonction distance et par compacité de $\overline{B(p,\varepsilon)}$ il existe un point x_1

t.q. $y_1 \in \partial \overline{B}(p,\varepsilon)$ et $d(y_1, Q) = \min\{ d(z,Q) \mid z \in \overline{B}(p,\varepsilon)\}$



Par construction il existe $w \in T_pM$ t.q. $\|w\| = \varepsilon$ et $\exp_p(w) = y_1$

$y_1 = \exp_p(w)$

On pose $w_1 = \dfrac{w}{\varepsilon} = \dfrac{w}{\|w\|} \in T_pM \quad \left(y_1 = \exp_p(\varepsilon . w_1) \right)$

et on note
$$\gamma(t) = \gamma_{w_1}(t) = \exp_p(t . w_1)$$

alors $\gamma(0) = p$, $\gamma(\varepsilon) = y_1$, $\ell(\gamma|_{[0,\varepsilon]}) = \varepsilon = d(p, y_1)$

et $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1 \quad (= \|w_1\|)$

Par hypothèse, $\gamma(t)$ est définie $\forall t \in (-\infty, \infty)$

A voir $\gamma(d) \in Q$ $\left(\text{car } \ell(\gamma|_{[0,d]}) = d \right)$

"La stratégie de la preuve est de montrer que lorsque $\gamma(t)$ s'éloigne de p elle se rapproche de Q et de quantifier ce rapprochement (par $t \leq d$)"

Observons que $\forall s \in [0,d]$ on a

$$s = \ell(\gamma|_{[0,s]}) \geq d(p, \gamma(s)) \geq d - d(\gamma(s), Q)$$

On pose

$$J = \{ s \in [0,d] \mid d(\gamma(s), Q) = d - s \}$$

On veut montrer que $d \in J \iff d(\gamma(d), Q) = d-d = 0$)

<u>Affirmation 1</u> J est intervalle non vide.

en effet $0 \in J$ (par définition de $d = d(p, Q)$)

et si $s \in J$ et $0 \le t < s$ alors

$$d(\gamma(t), Q) \le d(\gamma(t), \gamma(s)) + d(\gamma(s), Q)$$
$$\le (s-t) + (d-s) \quad (\text{car } s \in J)$$
$$\le d-t$$

et d'autre part

$$d = d(p, Q) \le d(p, \gamma(t)) + d(\gamma(t), Q)$$
$$\le t + d(\gamma(t), Q)$$

Donc $d(\gamma(t), Q) = d-t \Rightarrow t \in J$

On a montré que J est un intervalle.

<u>Affirmation 2</u> $[0, \varepsilon] \subset J$

En effet, il suffit de montrer que $\varepsilon \in J$, or

$$\begin{aligned} d(\gamma(\varepsilon), Q) = d(y_1, Q) &= d(p, Q) - d(p, y_1) \\ &= d - \varepsilon \end{aligned}$$

(car $y_1 \in \partial B(p, \varepsilon)$ est le point le plus proche de Q sur $\partial B(p, \varepsilon)$).

Affirmation 3

$$d \in J = \{ t \in [0, d] \mid d(\gamma(t), Q) = d - t \}$$

Se prouve par l'absurde. On pose

$$t_0 = \sup(J) \leq d$$

On va montrer que $t_0 = d$ ($t_0 < d$ conduit à une contradiction)

On suppose donc que $t_0 < d$. Alors $t_0 \in J$ (car J est clairement fermé.) On note $y_2 = \gamma(t_0)$ et on choisit

$$\varepsilon' < \min\{ i(y_2), d(y_2, Q) \}$$

On choisit encore $y_3 \in \partial B(y_2, \varepsilon')$ tq.

$$d(y_3, Q) = \min \{ d(z, Q) \mid z \in \partial B(y_3, \varepsilon') \}$$

Il existe alors $w \in T_{y_2}M$ tq. $\|w\| = \varepsilon'$ et tel que $\exp_{y_2}(w) = y_3$. Notons $w_1 = \frac{w}{\varepsilon} = \frac{w}{\|w\|} \in T_{y_2}M$

et on définit une courbe $\alpha : [0, t_0 + \varepsilon'] \longrightarrow M$ par

$$\alpha(t) = \begin{cases} \gamma(t), & \text{si } t \in [0, t_0] \\ \exp_{y_2}\big((t - t_0) \cdot w_1\big), & \text{si } t_0 \leq t \leq t_0 + \varepsilon' \end{cases}$$

Alors α est C^1 par morceaux. On affirme que cette courbe est minimale par la longueur, en fait

$$(t_0 + \varepsilon') = \ell(\alpha) = d(p, \alpha(t_0 + \varepsilon)) = d(p, y_3)$$

[en effet on a

(i) $$d - t_0 = d(y_2, Q) \left(= d(\gamma(t_0), Q)\right) \quad \text{(car } t_0 \in] \text{)}$$

$$= d(y_2, y_3) + d(y_3, Q) \quad \text{(par choix } y_3\text{)}$$

$$= \varepsilon' + d(y_3, Q)$$

i.e.

$$(d - t_0) = \varepsilon' + d(y_3, Q)$$

On a aussi

(ii) $\quad d = d(p, Q) \leq d(p, \gamma_3) + d(\gamma_3, Q)$

$$\leq (t_0 + \varepsilon') + (d - t_0 - \varepsilon')$$

$$= d$$

Donc on a égalité partout. Cela implique

$$d(p, \gamma_3) = d - d(\gamma_3, Q)$$

$$= d - (d - t_0 - \varepsilon')$$

$$= t_0 + \varepsilon'$$

$$= \ell(\alpha)$$

Donc α est une courbe de p à γ_3 de longueur égale à $d(p, \gamma_3)$

Donc α est une géodésique (C^2), donc

$$\alpha = \gamma\big|_{[0,\, t_0+\varepsilon]}$$

et donc

$$\begin{aligned} d(\gamma(t_0+\varepsilon'), Q) &= d(\alpha(t_0+\varepsilon'), Q) \\ &= d(\gamma_J, Q) \\ &= d - (t_0+\varepsilon') \end{aligned}$$

Donc $(t_0+\varepsilon') \in J$ ce qui contredit $t_0 = \sup(J)$

Cette contradiction dit $\sup(J) = d$, $d \in J$

par déf de J on a $\gamma(d) \in Q$ #

Théorème de Hopf-Rinow Soit (M, g) une v.r. connexe

(A) Les 4 conditions suivantes sont équivalentes :

(1) (M, g) est géodésiquement complète

(2) Il existe p tel que toute géodésique maximale issue de p est complète

(3) Toute boule fermée de l'espace métrique (M, d) est compacte

(4) (M, d) est métriquement complet (toute suite de Cauchy converge)

(B) Si l'une de ces conditions est vérifiée alors $\forall p, q \in M$ il existe une géodésique γ de p à q, longueur $d(p, q)$

__Preuve__ (B) a été démontrée dans la proposition précédente (en supposant que (A) est démontré)

__Preuve de (A)__ ① $\Rightarrow$ ② est évidente (par définition)

② $\Rightarrow$ ③ L'hypothèse ② dit que $\exp_p$ est définie sur T_pM en entier. La proposition précédente entraîne

$$\exp_p : T_pM \to M \text{ est surjective}$$

Plus précisément

$$\overline{B}(p,R) = \{q \in M \mid d(p,q) \leq R\} = \exp_p\Big(\underbrace{\{v \in T_pM \mid \|v\| \leq R\}}_{\text{compact}}\Big)$$

est l'image d'un compact par $\exp_p$ qui est continue $\Rightarrow$ $\overline{B}(p,R)$ est compact $\forall R$

(3) $\Rightarrow$ (4) Toute suite de Cauchy de (M, d) est bornée, donc contenue dans une boule $\overline{B(p,R)}$ compacte donc contient une sous-suite convergente (donc elle même convergente).

(4) $\Rightarrow$ (1) On doit prouver que si (M, d) est métrique complet, alors toute géodésique se prolonge de $-\infty$ à $+\infty$.

Par l'absurde : Supposons que $\gamma : [0, b) \to M$ ne se prolonge pas et posons

$$y_j = \gamma\left(b - \frac{1}{j}\right) \qquad (j \in \mathbb{N})$$

Alors $\{y_j\}$ est une suite de Cauchy $\left(d(y_j, y_k) \leq \left|\frac{1}{j} - \frac{1}{k}\right|\right)$

$y_j = \gamma\left(b - \frac{1}{j}\right)$

Donc il existe $y = \lim_{j \to \infty} y_j$

On pose

$$\gamma(b) = y$$

et pour ε assez petit on étend γ à $[0, b+\varepsilon)$

par

$$\tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} \gamma(t), & t \leq b \\ \exp_y\big((t-b)\,\dot{\gamma}(b)\big) & \text{si } b \leq t \leq b+\varepsilon \end{cases}$$

Cette construction contredit l'hypothèse que γ ne se prolonge pas (après b).

#