4.1. Le résultat est immédiat en appliquant les définitions.

4.2. On a en utilisant que la connexion est Levi-Cività :

$$X \cdot g(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \tag{1}$$

$$Y \cdot g(Z,X) = g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X) \tag{2}$$

$$Z \cdot g(X,Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y) \tag{3}$$

Puis en utilisant qu'elle est sans torsion :

$$g([X,Y], Z) = g(\nabla_X Y, Z) - g(\nabla_Y X, Z) \tag{4}$$

$$g([X,Z], Y) = g(\nabla_X Z, Y) - g(\nabla_Z X, Y) \tag{5}$$

$$g([Y,Z], X) = g(\nabla_Y Z, X) - g(\nabla_Z Y, X) \tag{6}$$

(1) + (2) - (3) + (4) - (5) - (6) est la relation cherchée. Cela permet de définir un vecteur $\nabla_X Y$ car la métrique est non dégénérée. Si on définit ∇ par la formule de Koszul, il faut vérifier qu'elle a toute les propriétés d'une connexion de Levi-Cività. Les calculs sont faciles et on ne les détaille pas.

4.3. La seule chose à vraiment vérifier est la propriété de Leibnitz. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ et $X, Y \in \Gamma(M)$, alors on calcule

$$\nabla_X fY = h_1 \nabla^1_X fY + h_2 \nabla^2_X fY = h_1(f\nabla^1_X Y + X(f)Y) + h_2(f\nabla^2_X Y + X(f)Y) = f\nabla_X Y + X(f)Y$$

où la dernière égalité est vraie si et seulement si $h_1 + h_2 = 1$.

4.4. (a) On rappelle qu'un champs parallèle X vérifie $\nabla_t X = 0$. Prenons deux champs parallèles X et Y. On a

$$\frac{d}{dt} g_{\gamma(t)}(X_t, Y_t) = \nabla_t g_{\gamma(t)}(X_t, Y_t) = g(\nabla_t X, Y) + g(X, \nabla_t Y) = 0.$$

(b) L'application de transport parallèle est l'application

$$\begin{array}{rccc} P_t : & T_{\gamma(0)}M & \longrightarrow & T_{\gamma(t)}M \\ & V_0 & \longmapsto & V_t \end{array}$$

où V_t est l'unique champs parallèle le long de γ avec $V_{\gamma(0)} = V_0$. Par le point précédent on a $g(X_t, X_t) = g(X_0, X_0)$. Or $g(X_t, X_t) = g(P_t X_0, P_t X_0)$ car X est parallèle.

Pour l'existence d'un repère mobile orthonormé et parallèle le long de γ, on part d'une base orthonormé $(v_1, \cdots, v_n)$ de $T_{\gamma(0)}M$ et on construit les considère les (uniques) champs $X_1, \cdots, X_n$ parallèles le long de γ et tels que

$$X_i(0) = v_i.$$

Le point précédent montrer que ces champs forment une base orthonormée en chaque point puisque

$$g_{\gamma(t)}(X_i(t), X_j(t)) = g_{\gamma(0)}(v_i, v_j) = \delta_i^j.$$

(c) Soit $(X_1, \cdots, X_n)$ un repère orthonormé et parallèle le long d eγ. On note

$$X(t) = \sum_i a_i(t) X_i(t).$$

On a d'une part, d'après la question (a),

$$g_{\gamma(t)}(X(t), X_i(t)) = g_{\gamma(0)}(X(0), X_i(0)) = a_i(0)$$

et aussi

$$g_{\gamma(t)}(X(t), X_i(t)) = \sum_j a_j(t) g(X_j(t), X_i(t)) = a_i(t).$$

(d) Supposons tout d'abord que γ est une géodésique, c'est-à-dire que $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$. Par ce qui précède on sait que $\|X\|$ et $\|\dot\gamma\|$ sont constants le long de γ. Mais aussi

$$\cos(<(X, \dot\gamma)) = \frac{g(X, \dot\gamma)}{\|X\| \, \|\dot\gamma\|}$$

est constant donc aussi $<(X, \dot\gamma)$ est constant par continuité.

Inversement supposons que $<(X, \dot\gamma)$ est constant et montrons que γ est une géodésique. On a

$$0 = \frac{d}{dt} g(X, \dot\gamma) = g(\nabla_{\dot\gamma} X, \dot\gamma) + g(X, \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma) = g(X, \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma)$$

Puisque X est quelconque et qu'il existe une base de tels champs, on conclut qu'on a bien

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$$

4.5. Le plongement ψ représente un paramétrage de M par l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^k$. Notons $u^1, \ldots, u^k$ les coordoonées sur Ω (et donc les coordonnées sur M associées à la carte ψ^{-1}).

L'espace tangent T_pM en un point $p = \psi(u) \in M$ admet pour base les vecteurs $\frac{\partial}{\partial u^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial u^k}$. On peut représenter ces vecteurs concrètement comme des vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ par

$$\xi_i = \psi_* \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \right) = \frac{\partial \psi}{\partial u^i}$$

Si on dérive le champs de vecteurs ξ_i en direction de la $j^{\text{ème}}$ coordonée, on obtient un vecteur de $\mathbb{R}^n$ que l'on peut décomposer en une composante tangente M et une composante normale à M. On peut donc écrire:

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial u^j} = \Delta_{ij}^k \xi_k + n_{i,j}$$

avec $n_{ij} \perp T_pM$. Le tenseur métrique est le rappel par ψ de la métrique Euclidienne de $\mathbb{R}^n$, ainsi

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right) = \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial u^i}, \frac{\partial \psi}{\partial u^j} \right\rangle = \langle \xi_i, \xi_j \rangle.$$

En dérivant g_{ij}, on a

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = \left\langle \frac{\partial \xi_i}{\partial u^k}, \xi_j \right\rangle + \left\langle \xi_i, \frac{\partial \xi_j}{\partial u^k} \right\rangle = \langle \Delta_{ik}^m \xi_m, \xi_j \rangle + \langle \xi_i, \Delta_{jk}^m \xi_m \rangle$$

car les vecteurs n_{ik} et n_{jk} sont orthogonaux à ξ_m. On a donc

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = \langle \Delta_{ik}^m \xi_m, \xi_j \rangle + \langle \xi_i, \Delta_{jk}^m \xi_m \rangle = \Delta_{ik}^m g_{mj} + \Delta_{jk}^m g_{jm}.$$

En comparant avec la preuve de l'unicité de la connection de Levi-Civita on conclut que $\Delta_{ik}^m = \Gamma_{ik}^m$ et donc

$$\Gamma_{ij}^k \xi_k = \Delta_{ij}^k \xi_k = \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial u^j}\right)^\top = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^j \partial u^j}\right)^\top$$

Remarque 1. La composante normale $n_{i,j} = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^j \partial u^j}\right)^\perp$ joue aussi un rôle important en théorie des sous-variétés, on reviendra sur cette question lors de l'étude de la *seconde forme fondamentale.*

Remarque 2. *Plus généralement, Si (M, g) est une variété riemannienne dont le connexion de Levi-Civita est ∇^M et si N est une sous-variété de M que l'on munit de la métrique induite. Alors la connexion de Levi-Civita de N, ∇^N est décrite par la formule*

$$\nabla_X^N Y = (\nabla_X Y)^\top$$

où $Z^\perp$ désigne la projection du champs Z sur le tangent à N. Pour montrer ce résultat, il s'agit de montrer que la connexion ∇^N satisfait à tous les axiomes de la connexion de Levi-Civita; on conclura par unicité.

4.6. Géodésiques dans les modèles de courbures constantes

(a) Dans le cas euclidien, l'équation des géodésiques est

$$\ddot{c}(t) = 0$$

(le terme non linéaire qui fait intervenir les symboles de Christoffel est nul). Cette équation s'intègre facilement et on trouve

$$c(t) = at + b.$$

Les géodésiques sont des lignes droites parcourues à vitesse constante.

(b) i. Notons

$$(x, y, z) = f(\theta, \varphi) = (\sin\varphi \cos\theta, \sin\varphi \sin\theta, \cos\varphi)$$

de sorte que

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = (-\sin\varphi \sin\theta, \sin\varphi \cos\theta, 0)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = (\cos\varphi \cos\theta, \cos\varphi \sin\theta, -\sin\varphi)$$

La métrique g de $\mathbb{S}^2$ est alors donnée par

$$g = \sin^\varphi d\theta^2 + d\varphi^2$$

Puis on calcule les symboles de Christoffel. Ceux qui sont non nuls sont

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = -\cos\theta \sin\theta \text{ et } \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \cot\theta.$$

Enfin on vérifie que les méridiens vérifie l'équation des géodésiques.
Évidemment ce n'est pas la méthode qu'il faut privilégier. La question suivante permet de traiter le cas général de la sphère de dimension quelconque, sans faire autant de calculs.

ii. Supposons que la géodésique γ ne soit pas le grand cercle d'intersection de la sphère avec le plan Ox_1x_{n+1}. Il existe alors un point $\gamma(t_0)$ en dehors de ce plan.
Considérons la réflexion de plan Ox_1x_{n+1}. C'est une isométrie de $\mathbb{S}^n$ donc elle transforme la géodésique γ en une autre géodésique δ. Puisque $\gamma(t_0)$ n'est pas dans le plan, on en déduit que les géodésiques γ et δ sont différentes.
Or ces deux géodésiques ont les mêmes conditions initiales. C'est une contradiction par le théorème d'existence et d'unicité des géodésiques de conditions initiales données.
Ainsi γ ne quitte jamais le plan Ox_1x_{n+1}.
On en déduit que les géodésiques sont toutes des grands cercles. En effet le groupe $\mathrm{O}_{n+1}(\mathbb{R})$ est transitif sur les grands cercles.

(c) i. On peut tout d'abord récupérer les symboles de Christoffel du 1/2-plan hyperbolique et faire un calcul similaire à (b) i.

ii. C'est classique : voir par exemple Anderson *Hyperbolic Geometry* theorem 2.5. Pour faire le calcul, il est commode de se souvenir que les droites et cercles ont une équation complexe de la forme

$$\alpha z\bar{z} + \bar{\beta}z + \beta\bar{z} + \gamma.$$

iii. C'est une application holomorphe.

iv. Il suffit à se stade de se souvenir que les transformations de Mobiüs sont des isométries. Par ailleurs elles sont transitives sur les droites verticales et cercles orthogonaux au bord.