| | |
|---|---|
| EPFL - Printemps 2021 | M. Troyanov, G. Buro |
| **Géométrie Riemannienne I** | **Exercices** |
| Série 9 | 27 avril 2021 |

**9.1**. Soit $(M,g)$ une variété riemannienne. Montrer que le tenseur de courbure s'exprime en coordonnées locales de la manière suivante

$$R^l_{ijk} = \partial_i \Gamma^l_{jk} - \partial_j \Gamma^l_{ik} + \sum_{r=1}^{n} \Gamma^r_{jk}\Gamma^l_{ir} - \Gamma^r_{ik}\Gamma^l_{jr}.$$

où les sont $\Gamma^l_{jk}$ les symboles de Christoffel.

**9.2**. Rappeler ce qu'est un 2-plan $\Pi \subset TM$ dans une variété Riemannienne $(M,g)$ et la courbure sectionnelle $K(\Pi)$. Puis démontrer que cette notion est bien définie (i.e. indépendante des choix effectués dans la définition).

**9.3**. Montrer que le tenseur de Ricci est symétrique : $R(X,Y) = R(Y,X)$.

**9.4**. Exprimer la courbure sectionnelle de la métrique $g' = a^2 g$ en fonction de la courbure sectionnelle de $g$.

**9.5**. On considère le cas d'une surface riemannienne $(S,g)$. On suppose que la métrique est donnée en "coordonnées polaires" par

$$g = dr^2 + f(r,\theta)^2 d\theta^2.$$

(a) Montrer que la courbure sectionnelle est solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + Kf = 0.$$

*Cette équation s'appelle l'équation de Jacobi dans le cas des surfaces. Elle réapparaîtra dans le cours dans le cas général.*

(b) Justifier que

$$\lim_{r\to 0} f(r,\theta) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{r\to 0} \frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta) = 1.$$

pour tout $\theta$.

(c) Déduire de l'exercice 6.5 la valeur de la courbure de la géométrie hyperbolique.

(d) Donner une expression (en coordonnées polaires) de toutes les métriques à courbure constante sur une surface.

(e) Prouver que deux surfaces de mêmes courbures constantes sont localement isométriques. Sont elles globalement isométriques ?

**9.6**. Que valent les courbures (sectionnelle, de Ricci et scalaire) de la sphère $\mathbb{S}^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$ ?