10.1. Prouver sans calcul que la sphère, l'espace Euclidien et l'espace hyperbolique ont une courbure sectionnelle constante

Montrer que pour tout $p \in M$, le groupe des isométries de (M, g) qui fixent p agit transitivement sur l'espace des 2-plans $\Pi \subset T_pM$.

10.2. Soit M Une variété munie une connexion affine ∇ et $\alpha \in \Omega^1(M)$. On rappelle que la différentielle extérieure de α est le 2-tenseur antisymétrique défini par: $d\alpha(X, Y) = X \cdot (\alpha(Y)) - Y \cdot (\alpha(X)) - \alpha([X, Y])$.

i) Montrer que α est fermée (i.e. $d\alpha = 0$) si et seulement si $\nabla\alpha$ est un 2-tenseur symétrique.

ii) Soit f une fonction lisse. On définit la Hessienne de f par:

$$\mathrm{Hess}_f(X, Y) = \nabla df(X, Y).$$

Montrer que Hess_f est symétrique.

iii) Montrer l'égalité suivante: $\mathrm{Hess}_f(X, Y) = g(\nabla_X \mathrm{grad} f, Y)$.

iv) Trouver les composantes de Hess_f en coordonnées locales.

10.3. *(Métrique produit)* Soit $M = M_1 \times M_2$ le produit de deux variétées Riemanniennes, muni de la métrique produit $g = g_1 \oplus g_2$. (g_i est une métrique Riemannienne sur M_i et $g(X_1 + X_2, Y_1 + Y_2) = g_1(X_1, Y_1) + g_2(X_2, Y_2)$ où X_i et Y_i sont tangents à M_i). On note R_i le tenseur de courbure de (M_i, g_i).

i) Calculer le tenseur de courbure R de g en fonction de R_1 et R_2.

ii) Même question pour la courbure de Ricci et la courbure scalaire.

iii) Montrer qu'une métrique produit ne peut pas avoir une courbure sectionnelle positive ou négative. Est-il possible d'avoir une courbure de Ricci positive ou négative?

10.4. Exprimer la courbure sectionnelle de la métrique $g' = a^2 g$ en fonction de la courbure sectionnelle de g.

10.5. (Dérivée covariante d'un tenseur) Soit T un tenseur de type $\binom{0}{k}$ sur une variété M munie d'une connexion ∇. On définit alors un tenseur ∇T de type $\binom{0}{k+1}$ par la formule

$$\nabla T(Z, X_1, \dots, X_k) = (\nabla_Z T)(X_1, \dots, X_k) = Z(T(X_1, \dots, X_k)) - \sum_{j=1}^{k} T(X_1, \dots, \nabla_Z X_j, \dots X_k).$$

Cette définition est motivée par le fait qu'elle donne une règle de Leibniz pour la dérivation de la fonction $T(X_1, \dots, X_k)$ en direction du champ de vecteurs Z. Par exemple si $k = 2$, alors

$$Z(T(X, Y))) = (\nabla_Z T)(X, Y) + T(\nabla_Z X, Y) + T(X, \nabla_Z Y).$$

a) Soit g une métrique riemannienne. Prouver que ∇ est la connexion de Levi-Civita de g si et seulement si ∇ est sans torsion et $\nabla g = 0$.

10.6. Si α est un 1-forme, calculer les coefficients de $\nabla\alpha$ en coordonnées locales.

10.7. (Seconde identité de Bianchi) Montrer que pour tout $X, Y, Z, T \in \Gamma(M)$ on a

$$\nabla_X R(Y,Z)T + \nabla_Y R(Z,X)T + \nabla_Z R(X,Y)T = 0.$$

10.8. $(*)$ Le tenseur d'Einstein G d'une variété (pseudo-) Riemannienne (M,g) est défini par:

$$G = Ric_g - \frac{1}{2} Scal \cdot g.$$

i) Montrer que $G = 0$ si et seulement si $Ric_g = 0$. Que se passe-t-il si $G + \Lambda g = 0$?

Quand (M,g) est une variété Lorentzienne, $G = 0$ est l'équation d'Einstein de la relativité générale dans le vide, l'équation $G + \Lambda g = 0$ est l'equation d'Einstein avec la constant cosmologique Λ.

ii) Utiliser la seconde identité de Bianchi pour montrer que pour toute variété Riemannienne (M,g):

$$\mathrm{div}(G) = 0.$$

Rappel: La divergence d'un $\binom{l}{k}$-tenseur T $(k \geq 1)$ est le $\binom{l}{k-1}$-tenseur $\mathrm{div}T$ définit en chaque point $p \in M$ par:

$$\mathrm{div}T(x_1, \dots, x_{k-1}, \alpha_1, \dots, \alpha_l) = \sum_i \nabla_{e_i} T(e_i, x_1, \dots, x_{k-1}, \alpha_1, \dots, \alpha_l),$$

où e_i est une base orthonormée de T_pM.