11.1. Soit p un point quelconque d'une variété Riemannienne (M, g) et $\Pi \subset T_pM$ un 2-plan (= sous-espace vectoriel de dimension 2). Soit Ω un voisinage de $0 \in T_pM$ pour lequel l'exponentielle au point p est bien définie et est un difféomorphisme sur son image. Notons aussi $S = \exp_p(\Omega \cap \Pi)$. Alors S est une surface dans M et on note $\bar{g}$ la métrique induite par le plongement $S \subset M$. Quelle est la valeur de

$$\bar{K}_p(\Pi) - K_p(\Pi)$$

où K est la courbure sectionnelle de (M, g) et $\bar{K}$ est la courbure sectionnelle de (S, g) ?

11.2. [Inégalité de Synge]

a) Une surface N de $\mathbf{R}^3$ est dite *réglée* si pour tout point $p \in N$ il existe un segment de droite euclidienne $[a, b]$ contenu dans N et qui contient le point p en son intérieur (exemples : un plan, un cylindre ou un cône).
Prouver que si $N \subset \mathbf{R}^3$ est une surface réglée, alors sa courbure est négative ou nulle.

b) Définir la notion de surface réglée dans une variété riemannienne quelconque et généraliser le résultat précédent.

11.3. Soit (M, g) une variété Riemannienne.

i) Montrer qu'en dimension 2, la courbure scalaire vaut le double de la courbure sectionnelle.

ii) Montrer qu'une variété d'Einstein de dimension 3 a une courbure sectionnelle constante. Est-ce valable en dimension supérieure? *(On rappelle qu'une variété Riemannienne (M, g) est dite d'* Einstein *si $Ric_g = \lambda g$ pour une constante λ).*

a) Prouver que ∇ est la connexion de Levi-Civita de la métrique riemannienne g si et seulement si ∇ est sans torsion et $\nabla g = 0$.

b) Prouver que si ω est une 1-forme et ∇ est une connexion sans torsion, alors

$$d\omega(X, Y) = (\nabla_X \omega)(Y) - (\nabla_Y \omega)(X).$$

c) Que devient la formule précédente si la torsion de ∇ est non nulle ?