EPFL - Printemps 2021	M. Troyanov, G. Buro
Géométrie Riemannienne I	**Exercices**
Série 13	25 mai 2021

13.1. Soient (M, g) une variété Riemannienne et $\gamma : [0, 1] \to M$ une courbe dans M. On défini l'énergie de γ par

$$E(\gamma) = \frac{1}{2}\int_0^1 g(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))dt.$$

Ecrire les formules de variation première et seconde pour l'énergie.

13.2. Soit (M, g) une variété à courbure négative.
Montrer que deux géodésiques périodiques étant dans une même classe d'homotopie sont toujours à distance constante l'une de l'autre.

13.3. Soit (M, g) une variété Riemannienne et $p \in M$. Montrer que le développement de Taylor de g en coordonées normales centrées en p est

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} - \frac{1}{3}R_{iklj}x^k x^l + \mathcal{O}(|x|^3).$$

indication: Soit $\gamma(t) = (tV_1, ..., tV_n)$ une géodésique radiale et $J(t) = tW^i\partial_i$ un champs de Jacobi le long de γ. Dériver un nombre suffisant de fois $g(J(t), J(t))$.

13.4. Soit (M, g) une variété à courbure sectionnelle constante $K = k$, $\gamma : [0, 1] \to M$ une géodésique (de vitesse unitaire), et $E_1, ..., E_n \in \Gamma_\gamma$ des champs de vecteurs le long de γ tels que pour tous $i, j = 1, ..., n$ on a

$$\begin{cases} g(E_i, E_j) = \delta_{ij} \\ \nabla E_i = 0 \\ E_n = \dot\gamma \end{cases}$$

Tout champ $Y \in \Gamma_\gamma$ s'écrit alors $Y = \sum_{i=1}^n y_i\, E_i$, avec $y_i : [0, 1] \to \mathbb{R}$.

a) Montrer que Y est un champ de Jacobi si et seulement si

$$\ddot y_n = 0 \quad et \quad \ddot y_i + ky_i = 0 \quad (\text{pour } i = 1, \ldots, n-1).$$

b) Résoudre cette équation (commencer par les cas $k = 0, 1, -1$).

13.5. (a) Soit $\gamma : [0, 1] \to M$ une géodésique et $Y \in \Gamma_\gamma$ un champ de Jacobi le long de γ. Montrer que Y est entièrement déterminée par les conditions $Y(0) = Y_0$ et $\nabla_{\dot\gamma(0)}Y = Y_0'$.

(b) Montrer que si γ est une géodésique de (M, g) et Y est un champ de Jacobi tel que $Y_t \perp \dot\gamma$ en deux points $\gamma(t_1)$ et $\gamma(t_2)$, $(t_1 \neq t_2)$, alors $Y_t \perp \dot\gamma$ pour tout t. De plus on a aussi $\nabla_t Y_t \perp \dot\gamma$ pour tout t.