5.1. (a) Soit $X = a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in \Gamma(M)$ un champ de vecteurs exprimé dans un système de coordonnées sur M. On calcule:

$$\begin{aligned} df.X = X(f) &= a^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \\ &= a^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \delta^i_i \\ &= a^i \frac{\partial f}{\partial x^i} g^{ik} g_{ki} \\ &= a^i g^{ik} \frac{\partial f}{\partial x^i} \langle \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^i} \rangle \\ &= a^i g^{ik} \frac{\partial f}{\partial x^i} \langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^k} \rangle \\ &= \langle a^i \frac{\partial}{\partial x^i}, g^{ik} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^k} \rangle. \end{aligned}$$

Donc grad$f$ est le champ de vecteurs qui s'écrit $g^{ik} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^k}$ en coordonnées.

(b) La divergence d'un champ de vecteurs Y est la trace de l'endomorphisme $X \mapsto \nabla_X Y$. En coordoonées, si $Y = b^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, alors

$$\operatorname{div}(Y) = \sum_i \left(\frac{\partial b^i}{\partial x^i} + \sum_j \Gamma^i_{ij} b^j \right).$$

(c) Le Laplacien d'une fonction f est $\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f))$. En coordonnées :

$$\Delta f = \sum_{i,j} g^{ij} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_k \Gamma^k_{ij} \frac{\partial f}{\partial x^k} \right)$$

Remarque. On a par ailleurs la formule suivante :

$$\sum_j \Gamma^j_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^i} \log(\sqrt{|g|}) = \frac{1}{2} g^{ik} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}$$

où $|g| = \det(g_{i,j})$. On peut donc aussi écrire

$$\operatorname{div}(Y) = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{|g|} \cdot b^i \right) = \sum_i \left(\frac{\partial b^i}{\partial x^i} + \sum_j \frac{\partial \log(|g|)}{\partial x^j} \cdot b^j \right).$$

et

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{|g|} \cdot g^{ij} \cdot \frac{\partial f}{\partial x^j} \right)$$

(d) En effet, en coordonnées, ceci se voit directement, car "les coordonnées c'est comme dans $\mathbb{R}^n$" et dans $\mathbb{R}^n$, sans l'avoir dit, en deuxième année, on a pris la métrique Euclidienne $g_{ij} = \delta_{ij}$.

5.2. Soit $\gamma(t) = (t, c) = t + ic$ une portion d'horocycle et soit $X_t = a_1(t) + ia_2(t)$ un champ le long de γ. L'équation différentielle qui exprime que X est parallèle fait intervenir les symboles de Christoffel de la métrique hyperbolique calculés à la série précédente. Tous calculs faits, on obtient $\nabla_t X_t = 0$ si et seulement si

$$\begin{pmatrix} \dot{a_1} \\ \dot{a_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c} \\ -\frac{1}{c} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

On résout cette équation par un calcul d'exponentielle de matrice (voir plus bas). On a finalement,

$$X_t = C_1 \sin(t/c) + C_2 \cos(t/c) + i(D_1 \sin(t/c) + D_2 \cos(t/c))$$

où les constantes dépendent des conditions initiales.

5.3. Comme solution de cet exercice, je vous donne un exercice corrigé plus général.

Exercice. On commence par une définition. Soit $f : M \to N$ une application différentiable entre deux variétés Riemanniennes, et soient ∇ une connection affine définie sur N et $\overline{\nabla}$ une connection affine sur M. On dit que f est *compatible* avec ∇ et $\overline{\nabla}$ si la condition suivante est satisfaite pour tous champs de vecteurs X, Y sur M :

$$f_*(\overline{\nabla}_X Y) = \nabla_{f_* X}(f_* Y).$$

Supposons que $(x^1, \ldots, x^m)$ est un système de coordonnées au voisinage de $p \in M$ et $(y^1, \ldots, y^m)$ est un système de coordonnées au voisinage de $q = f(p) \in N$.

(a) Montrer que les symboles de Christoffels de ∇ et $\overline{\nabla}$ sont reliés par la formule

$$\sum_{k=1}^{m} \overline{\Gamma}_{ij}^{k}(x) \frac{\partial y^\gamma}{\partial x^k} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}(f(x)) \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} + \frac{\partial^2 y^\gamma}{\partial x^i \partial x^j}.$$

(b) Montrer que si f est un difféomophisme local, alors on peut aussi écrire cette formule sous la forme

$$\overline{\Gamma}_{ij}^{k}(x) = \sum_{\gamma=1}^{m} \left[\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}(f(x)) \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^k} + \frac{\partial^2 y^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} \right] \frac{\partial x^k}{\partial y^\gamma}.$$

(c) Montrer que si $M = \mathbb{R}$ ou $M = \mathbb{S}^1$, alors $f : M \to N$ est compatible avec ∇ si et seulement si f est une géodésique de N pour ∇.

(d) Si $M = \mathbb{R}^m$ et $N = \mathbb{R}^n$ avec les connexions plates standards, alors $f : M \to N$ est compatible avec les connections si et seulement si c'est une application affine, c'est-à-dire une application du type $f(x) = Ax + b$ où A est une $n \times m$ matrice et $b \in \mathbb{R}^n$ est constant.

(d) Déduire de la formule en (b) une nouvelle solution de l'exercice 4.1 (lire éventuellement les sections 2.2 et 2.3 du polycopié).

Solution

(a) Rappelons que par définition

$$\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\overline{\Gamma}_{ij}^k(x)\frac{\partial}{\partial x^k} \qquad \text{et} \qquad \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^\alpha}}\left(\frac{\partial}{\partial y^\beta}\right)=\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma(y)\frac{\partial}{\partial y^\gamma}$$

On a aussi $y=f(x)$ et $f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)=\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^\alpha}$, donc la condition $f_*(\overline{\nabla}_X Y)=\nabla_{f_*X}(f_*Y)$ dit que

$$\begin{aligned}
f_*\left(\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right) &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\left(\frac{\partial y^\beta}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^\beta}\right)\\
&= \frac{\partial^2 y^\beta}{\partial x^i\partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^\beta}+\frac{\partial y^\beta}{\partial x^j}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\left(\frac{\partial}{\partial y^\beta}\right)\\
&= \frac{\partial^2 y^\beta}{\partial x^i\partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^\beta}+\frac{\partial y^\beta}{\partial x^j}\nabla_{\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^\alpha}}\left(\frac{\partial}{\partial y^\beta}\right)\\
&= \frac{\partial^2 y^\beta}{\partial x^i\partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^\beta}+\frac{\partial y^\beta}{\partial x^j}\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^\alpha}}\left(\frac{\partial}{\partial y^\beta}\right)\\
&= \frac{\partial^2 y^\beta}{\partial x^i\partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^\beta}+\frac{\partial y^\beta}{\partial x^j}\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma\frac{\partial}{\partial y^\gamma}\\
&= \left(\frac{\partial^2 y^\gamma}{\partial x^i\partial x^j}+\frac{\partial y^\beta}{\partial x^j}\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma\right)\frac{\partial}{\partial y^\gamma}
\end{aligned}$$

D'autre part

$$f_*\left(\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right)=f_*\left(\overline{\Gamma}_{ij}^k(x)\frac{\partial}{\partial x^k}\right)=\overline{\Gamma}_{ij}^k(x)f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)=\overline{\Gamma}_{ij}^k(x)\frac{\partial y^\gamma}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial y^\gamma}$$

donc

$$\overline{\Gamma}_{ij}^k(x)\frac{\partial y^\gamma}{\partial x^k}=\frac{\partial y^\beta}{\partial x^j}\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma(f(x))+\frac{\partial^2 y^\gamma}{\partial x^i\partial x^j}$$

Pour tous α,β,γ. On a prouvé la formula (a).

(b) Se déduit algébriquement de (a) et du fait que la matrice Jacobienne $\left(\frac{\partial y^\gamma}{\partial x^k}\right)$ est inversible si f est un difféomorphisme local.

(c) Si M est de dimension 1, alors les symboles de Christoffels $\overline{\Gamma}_{ij}^k$ sont nuls et l'équation en (b) se ramène à

$$\frac{d^2y^\gamma}{dx^2}+\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma(f(x))\frac{dy^\alpha}{dx}\frac{dy^\beta}{dx}=0,$$

qui est l'équation des géodésiques.

(d) Dans le cas où $\overline{\nabla}$ est la connection standard sur $M=\mathbb{R}^m$ et ∇ est la connection standard sur $N=\mathbb{R}^n$, alors les symboles de Christoffels $\overline{\Gamma}_{ij}^k$ et $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ sont tous nuls. L'équation en (a) devient

$$\frac{\partial^2 f^\gamma}{\partial x^i\partial x^j}=0, \qquad \forall\gamma=1,..,n, \quad \forall i,j=1,\dots,m.$$

On déduit facilement que f est affine.

(e) On se donne deux systèmes de coordonnées (x^i) et (y^i) dans un ouvert U d'une variété M munie d'une connection ∇.

Les coefficients de la torsion sont définis dans le système de coordonnées (x^i) par

$$\overline{T}_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} = \overline{T}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) - \left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right] = \left(\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k\right)\frac{\partial}{\partial x^k},$$

c'est-à-dire

$$\overline{T}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k.$$

De même

$$T_{\alpha\beta}^\gamma = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma - \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma.$$

La formule en (b) (appliquée à $f = \mathrm{id}$) entraîne alors que

$$\overline{T}_{ij}^k(x) = \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^n T_{\alpha\beta}^\gamma(f(x))\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial y^\gamma}.$$

cela signifie que T vérifie la formule de transformation multilinéaire des tenseurs de type $\binom{1}{2}$.

5.4. Soit (M, g) une variété riemannienne et $\gamma : [0,1] \to M$ une courbe lisse quelconque.

(a) On utilise le fait que la dérivée covariante est compatible avec la métrique:

$$\frac{d}{dt}g(x,y) = g(\nabla_t X, Y) + g(X, \nabla_t Y) = g(0, Y) + g(X, 0) = 0.$$

(b) L'operateur de transport parallèle est une isométrie car il préserve le produit scalaire entre vecteurs. Pour trouver les champs souhaités on commence avec une base orthonormée $(E_i)_i$ de l'espace $T\gamma(0)$, puis on fait le transport paralléle de chaque E_i le long de γ. Ainsi on obtient des champs $E_i(t)$ qui donnent une base orthonormée de chaque espace tangent $T_{\gamma(t)}M$ car $\langle E_i(t), E_j(t)\rangle = \langle E_i(0), E_j(0)\rangle = \delta_{i,j}$.

(c) Les coordonnées $X^i(t)$ du vecteur $X(t)$ dans la base orthonormée $(E_i)_i$ sont les produits scalaires $X^i(t) = \langle X(t), E_i(t)\rangle$, donc elles sont constantes.

(d) Si γ est géodésique, alors $\gamma'(t)$ est parallèle, donc $\|\gamma'(t)\|$ est constante et l'angle $\angle(X, \gamma') = \arccos \frac{\langle X, \gamma'}{\|X\|\,\|\gamma'\|}$ est constant aussi car il est exprimé en termes de produits scalaires entre champs parallèles.

5.5. Soit $(E_i)_i$ une base de champs parallèles le long de la curve γ. Cela permet de décomomposer le vecteur $V(t)$ selon la formule $V(t) = V^i(t)\,E_i(t)$ et obtenir une première formule pour sa dérivée covariante,

$$\nabla_t V = (V^i)'(t)\,E_i(t).$$

D'autre part on a déjà montré que le transport paralléle préserve les coordonnées dans la base E_i, donc $P_t^- V(t) = V^i(t)\,E_i(0)$, et cela permet d'obtenir la deuxième formule

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{P_t^{-1}V(t) - V(0)}{t} &= \lim_{t\to 0}\frac{V^i(t)\,E_i(0) - V^i(0)\,E(0)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{V^i(t) - V^i(0)}{t}\,E_i(0) = (V^i)'(0)\,E_i(0) = \nabla_t V|_0\end{aligned}$$

5.6.

5.7. La clef de cet exercice est le fait que l'operateur P_γ de transport parallèle le long d'une courbe γ dépend fonctoriellement de la courbe γ, ca veut dire, on a $P_{\gamma*\beta} = P_\beta \circ P_\gamma$. (Ici on dénote $\gamma * \beta$ la concatenation de deux courbes γ et β.)

5.8. On considère en effet le cône tangent à la sphère dont l'intersection est exactement le cercle en question.

Je ne donne pas de détails de calculs mais seulement les arguments théoriques qu'il faut utiliser. Il y a deux choses importantes à remarquer :

(1) Le transport parallèle dans la sphère est le même que le transport parallèle dans le cône. En effet, dans les deux cas la métrique est la métrique euclidienne induite par celle de $\mathbb{R}^3$.

(2) Le transport parallèle dans le cône est beaucoup plus simple à analyser que celui de la sphère. En effet le cône est un objet *euclidien* (c'est un quotient par une rotation d'un domaine de $\mathbb{R}^2$). Le transport parallèle est donc le même que dans le plan.

Pour terminer complètement l'exercice, il reste à exprimer l'angle au sommet du cône en fonction de la position du cercle par rapport à l'équateur, puis d'en déduire par quelle rotation il faut quotienter $\mathbb{R}^2$ pour obtenir le cône en question. Plus de détails dans Gallot Hulin, Lafontaine *Riemannian geometry* p.79.