EPFL - Printemps 2021	M. Troyanov, G.Buro
Géométrie Riemannienne I	**Corrigé**
Corrigé 6	6 avril 2021

6.1. On obtient ceci directement par la formule de variation première. L'intégrale s'annule car $\nabla_{\dot{\gamma_s}}\dot{\gamma_s} = 0$ car on est sur une surface réglée, et les cos s'obtiennent car $\cos(\varphi(s)) = \langle \frac{\partial \gamma_s}{\partial s}(1), \dot{\gamma_s}(1)\rangle$ et $\cos(\theta(s)) = \langle \frac{\partial \gamma_s}{\partial s}(0), \dot{\gamma_s}(0)\rangle$ (les courbes sont paramétrées à vitesse 1).

6.2. (a) On utilise la compatibilité de la connexion avec la métrique et le fait que la courbe est paramétrée par la longueur de l'arc:

$$\langle \nabla_t \dot{\gamma}, \dot{\gamma}\rangle = \nabla_t \langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma}\rangle - \langle \nabla_t \dot{\gamma}, \dot{\gamma}\rangle = -\langle \nabla_t \dot{\gamma}, \dot{\gamma}\rangle.$$

Ceci force $\langle \nabla_t \dot{\gamma}, \dot{\gamma}\rangle = 0$.

(b)
- Première manière:
  Etant donné que la longueur est invariante par reparamétrisation, c'est évident. L'intérêt de cet exercice est de vérifier que la formule de variation première a bien un sens, car elle devrait s'annuler.
- Seconde manière:
  On utilise le lemme du cours précédant la formule de variation première car on ne peut pas utiliser cette dernière étant donné que les courbes à s fixé ne sont pas paramétrées à vitesse constante.
  On a

$$\frac{d}{ds}\ell(\Phi_s(t)) = \int_0^1 \frac{\langle \nabla_{\dot{\Phi}_s(t)} \frac{\partial \Phi_s}{\partial s}(t), \dot{\Phi}_s(t)\rangle}{||\dot{\Phi}_s(t)||} dt.$$

  On a que $\frac{\partial \Phi_s}{\partial s}(t)$ est un vecteur tangent à la courbe car Φ_s est une reparamétrisation, donc $\frac{\partial \Phi_s}{\partial s}(t) = \lambda \dot{\Phi}_s(t), \lambda \in \mathbb{R}$ et on a montré en (a) que $\langle \nabla_t \dot{\gamma}, \dot{\gamma}\rangle = 0$ pour toute courbe, ce qui prouve que $\frac{d}{ds}\ell(\Phi_s(t)) = 0$.

6.3. On a $\ell(\gamma) = d(p, N) = \inf\{d(p, q) \,|\, q \in N\}$ $\gamma(0) = p$ et $\gamma(1) = q$ et il s'agit de montrer que $\dot{\gamma}(1)$ est perpendiculaire à T_qN.
Soient $\xi \in T_qN$ et $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to N$ une courbe telle que $\dot{\sigma}(0) = \xi$. Alors il existe une variation $\Psi : [0, 1] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ telle que $\Psi(t, 0) = \gamma(t), \Psi(1, s) = \sigma(s), \Psi(0, s) = p$. Une telle variation existe toujours, car on peut se placer dans une carte autour de q étant donné que la condition que nous voulons démontrer est locale. On peut donc, via une carte, définir $\Psi(s, t) = \gamma(t)+t(\sigma(s)-q)$. Ensuite, la formule de variation première pour la variation Ψ et le fait que γ soit une géodésique minimisante forcent à avoir $\langle \dot{\gamma}(1), \xi\rangle = 0$.

6.4. La définition des coordonnées polaires Riemanniennes a été vue en cours : on se place au voisinage d'un point p, on prend des coordonnées polaires dans T_pM et on les amène dans la variété par l'exponentielle.
On déduit du lemme de Gauss une expression pour g,

$$g = dr^2 + f(r, \theta)^2 d\theta^2$$

où f est une fonction lisse.
Il s'agit donc de déterminer la fonction f. Or, dans le modèle du disque, on a

$$g = 4\frac{dx^2 + dy^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}$$

Dans tout ce qui précède, la variable r représente la distance *riemannienne* au point p (dans le cas du disque hyperbolique $p = (0,0)$). On introduit alors une nouvelle variable, ρ qui est la distance *euclidienne* au point $(0,0)$. La métrique euclidienne $dx^2 + dy^2$ s'écrit en coordonnées polaires $d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2$ de sorte que la métrique hyperbolique a une expression

$$g = dr^2 + 4\frac{\rho^2}{(1-\rho^2)^2}.$$

Il reste alors à exprimer ρ en fonction de $\mathbb{R}$. Pour cela, on choisit un chemin de longueur euclidienne ρ et on calcule sa longueur hyperbolique. Prenons le chemin

$$\begin{array}{rccc} c: & [0,\rho] & \longrightarrow & \mathbb{H}^2 \\ & t & \longmapsto & (t,0) \end{array}$$

Ainsi

$$r(\rho) = \int_0^\rho \frac{2dt}{1-t^2} = 2\arctan\mathrm{h}(\rho).$$

On trouve donc $\rho = \tanh(r/2)$. Enfin il reste à exprimer $\frac{2\rho}{1-\rho^2}$ en fonction de r. En effet :

$$\frac{2\rho}{1-\rho^2} = \frac{2\tanh(r/2)}{1-\tanh^2(r/2)} = 2\tanh(r/2)\cosh^2(r/2) = 2\cosh(r/2)\sinh(r/2) = \sinh(r).$$

On conclut que

$$g = dr^2 + \sinh^2(r)d\theta^2.$$