EPFL - Printemps 2021	M. Troyanov, G. Buro
Géométrie Riemannienne I	**Exercices**
Série 7	28 Avril 2021

7.1. Soient $v \in T_pM$ et $\gamma_v(t) := \exp_p(tv)$, alors $\phi(\gamma_v(t))$ est une géodésique de N car ϕ est une isométrie. On a aussi que

$$\frac{d}{dt}\Big|_0 \phi(\gamma_v(t)) = d_p\phi(v)$$

par la règle de dérivation en chaine et la définition de l'exponentielle.
De plus, $\exp_{\phi(p)}(d_p\phi.tv)$ est la même géodésique que $\phi(\gamma_v(t))$, étant l'unique solution d'une équation differéntielle, par le théorème 3.3.1 du cours. On a donc l'égalité

$$\exp_{\phi(p)}(d_p\phi.v) = \phi(exp_p(v))$$

et le diagramme commute.

7.2. On va montrer que l'application $\eta = \varphi\psi^{-1}$ est l'identité.

Considérer l'ensemble

$$X = \{m \in M \mid \eta(m) = m, d_m\eta = id\}$$

on va montrer que cet ensemble est ouvert et fermé dans M. Il est clairement fermé. Soit $p \in X$ un point. L'application exponentielle est définie sur une boule ouverte de rayon $\delta > 0$ autour de 0 dans $T_p(M)$. Pour tout v dans cette boule, soit $q = exp_p(v)$. Alors

$$\eta(q) = \eta(exp_p(v)) = exp_{\eta(p)}(d_p\eta(v)) = exp_p(v) = q$$

On remarque ensuite que $d_q\eta = id$. Donc X est ouvert.

Etant donné que X est ouvert et fermé, et non vide, et comme M est connexe, on en conclu que $X = M$.

7.3. Soient $\varepsilon < \mathrm{inj}(p)$ et $\mathbb{S}_1 = \{u \in T_pM \,\big|\, ||u|| = 1\}$.
Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{S}_1$ un domaine de coordonnées, i.e. pour tout $u \in \mathcal{U}$, $u = (u^1, ..., u^{n-1})$. Alors on a $\Phi : \mathbb{S}_1 \times]0, \varepsilon[\to M$ donnée par $\Phi(u, r) = \exp_p(ru) = \exp_p(r, u^1, ..., u^{n-1})$.
Par le lemme de Gauss, $g = dr^2 + h^t$ où $h^t = h^t_{ij} du^i du^j$ (cordonnées polaires Riemanniennes).
Soit $v \in \mathbb{B}_\varepsilon = \{u \in T_pM \,\big|\, ||u|| < 1\} \subset T_pM$ alors, $v = ru$ où $u = \frac{v}{||v||}$ et $\gamma_u(t) := \exp_p(tu)$.
En coordonnées, on a vu que le gradient de f_p s'écrit:

$$\mathrm{grad}(f_p)_q = g_q^{ij} \frac{\partial f_p}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_q.$$

Or:

$$f_p(q) = d(p, q) = ||v||(= ||\exp^{-1}(q)||) = ||ru|| = r$$

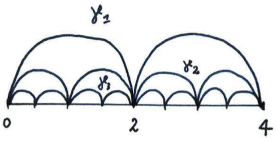
et

$$\frac{\partial r}{\partial x^j} = \begin{cases} 0 \text{ si } x^j = u^j, j = 1, ..., n-1 \\ 1 \quad \text{ si } x^j = r, \text{ i.e. } j = n \end{cases}$$

Par conséquent, $\mathrm{grad}(f_p)_q = g^{in} \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial r}$.
De plus, dans $\mathcal{U}$, $\gamma(t) = (u(t), r(t)) = (u, r)$ et donc $\dot\gamma(t) = (0, 1)$ dans la base $\frac{\partial}{\partial u^1}, ..., \frac{\partial}{\partial u^{n-1}}, \frac{\partial}{\partial r}$, c'est à dire: $\dot\gamma(t) = \frac{\partial}{\partial r} \big|_{\gamma(t)}$.
Donc on a bien

$$\mathrm{grad}(f_p)_q = \dot\gamma(d(p, q)) = \dot\gamma(f_p(q)).$$

7.4. (a) Pour montrer que ℓ n'est pas continue, considérer γ l'intervalle $[0,4]$ et la suite γ_n donnée de la manière suivante:



Alors pour tout n, $\ell(\gamma_n) = 2\pi$ mais $\ell(\gamma) = 4$, ce qui montre que ℓ n'est pas continue.

Si on désire travailler avec des courbes infiniment différentiables, on peut aussi considérer la suite suivante: $\gamma_n(t) := (t, \frac{1}{n}\sin(nt))$ où $t \in [0, 2\pi]$.

(b) Pour une courbe $\gamma : [0,1] \to M$, et $Y = \{t_1, ..., t_{n+1}\}$ une partition de $[0,1]$, on note $\Sigma(Y) = \sum_{i=1}^{n} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1}))$, où d est la distance induite par la métrique Riemannienne. Soient γ_j une suite de courbes convergeant ponctuellement ver γ. Soit $\varepsilon > 0$ et fixer une partition Y de γ telle que $\ell(\gamma) - \Sigma(Y) < \varepsilon$. Considérer maintenant les sommes $\Sigma_j(Y)$ pour les courbes γ_j correspondant à la même partition Y.Choisir j assez grand pour que $d(\gamma_j(t_i), \gamma(t_i)) < \varepsilon$ pour tout $t_i \in Y$. On a alors:

$$\ell(\gamma) \leq \Sigma(y) + \varepsilon \leq \Sigma_j(Y) + \varepsilon + (n+1)\epsilon \leq \ell(\gamma_j) + (n+2)\varepsilon.$$

Comme ε est arbitraire, on a la semi-continuité inférieure.

(c) Il faut prendre la convergence $\mathcal{C}^1$ c'est à dire qu'il faut que γ_n converge uniformément vers γ et que $\dot{\gamma}_n$ converge vers $\dot{\gamma}$ dans TM muni de la topologie de fibré vectoriel, c'est à dire, la topologie qui rend continue la projection $\pi : TM \to M$.

7.5. Soient $\gamma : [0, d(p,q)] \to M$ et $\eta : [0, d(p,q)] \to M$ deux géodésiques minimisantes de p à q. Supposer par contradiction que η est minimisante après q, c'est à dire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\eta : [0, d(p,q)+\varepsilon] \to M$ est minimisante. On a donc que le morceau de courbe $\eta\big|_{[d(p,q)-\varepsilon, d(p,q)+\varepsilon]}$ est minimisant. Or γ est aussi minimisante jusqu'a q, donc si on définit la courbe $\phi : [0, d(p,q)+\varepsilon] \to M$ par $\phi(t) = \gamma(t)$ si $t \in [0, d(p,q)]$ et $\phi(t) = \eta(t)$ si $t \in [d(p,q), d(p,q)+\varepsilon]$. Mais alors ϕ est aussi une géodésique, or ϕ n'est pas différentiable en $d(p,q)$, et dans notre cadre $\mathcal{C}^\infty$ les géodésiques sont lisses, en tant que solution de l'équation des géodésiques. Nous avons donc une contradiction.