8.1. En utilisant le théorème de Pythagore, on montre qu'une géodésique d'un produit $M_1 \times M_2$ est une courbe $c = (c_1, c_2)$ où chaque c_i est une géodésique de M_i.

Ensuite on conclut que toute géodésique de $M_1 \times M_2$ se prolonge infiniment si et seulement si les géodésiques dans les facteurs se prolongent.

8.2. On va montrer que chaque géodésique paramétrée par la longueur de l'arc $\gamma : [0, r) \to M$ peut s'étendre à $[0, r + \epsilon)$ pour un certain $\epsilon > 0$. Cela implique que la variété est géodésiquement complète et donc, par le théorème de Hopf-Rinow, qu'elle est complète. Pour $p \in M$, il existe $\delta > 0$ tel que toute géodésique de vitesse 1 issue de p peut être étendue pour avoir une longueur d'au moins δ. On rappelle que cette quantité est appelée le rayon d'injectivité au point p. Soit $q = \gamma(r - \frac{\delta}{2})$. Par homogénéité, il existe une isométrie $\phi : M \to M$ qui envoie p sur q.

Considérer maintenant la géodésique η, donnée par $\gamma : [r - \frac{\delta}{2}, r) \to M$ qui commence en $q = \gamma(r - \frac{\delta}{2})$. La géodésique $\phi^{-1}(l)$ peut être étendue à une géodésique η_1 de longueur au moins δ. Cela veut dire que $\phi(\eta_1)$ étend η, et on obtient l'extension voulue de γ à $[0, r + \frac{\delta}{2}]$.

8.3. Une conséquence du théorème de Hopf-Rinow est qu'il existe toujours une géodésique minimale entre deux points p, q d'une variété Riemannienne. Soit m le milieu d'une telle courbe. Du fait que M est isotrope en m, on obtient une isométrie qui envoie p sur q.

8.4. Soient $p \in M$ et $\{q_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ une suite dans M telle que $d(p, q_n) \to \infty$ quand $n \to \infty$. Ici nous avons utilisé le fait que M n'est pas compacte. Comme M est complète, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe une géodésique minimale γ_n de p à q_n. Soit $v_n = \dot{\gamma_n}(0)$. $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de vecteurs unités de $T_p(M)$ et doit donc contenir une sous-suite qui converge vers un vecteur unité $v \in T_p(M)$. On défini la géodésique γ issue de p, telle que $\dot{\gamma}(0) = v$, il faut montrer que c'est la géodésique recherchée. Il faut vérifier que pour tout $t \in \mathbb{R}_{>0}$, $d(p, \gamma(t)) = t$.

Soit $x_{n,t} = \gamma_n(t)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand et contenu dans la sous-suite décrite ci dessus. Noter que $x_{n,t} \to \gamma(t)$ (dans la sous-suite) et $d(p, x_{n,t}) = t$ pour tout n appartenant à la sous-suite. Il s'ensuit donc bien que $d(p, \gamma(t)) = t$.

8.5. $\Rightarrow$:

Soit γ une courbe divergente, comme M est complète, par le théorème de Hopf-Rinow, on a que toute boule fermée est compacte, et donc γ si on considère $\bar{B}_R(\gamma(0))$, γ sort de cette boule, pour n'importe quel choix de $R > 0$, donc $\ell(\gamma) > R$ pour tout R et donc γ es de longueur infinie.

$\Leftarrow$:

Supposer que M n'est pas complète, alors, par le théorème de Hopf-Rinow, il existe une géodésique $\gamma : [0, T[\to M$ qu'on ne peut pas étendre au delà de T. Ceci implique que $\ell(\gamma) < \infty$. Il s'agit de montrer que γ est une courbe divergente pour avoir terminé la preuve. Montrons ceci par l'absurde:
Supposons qu'il existe un compact $K \subset M$ tel que $\gamma(t) \in K$ pour tout $t \in [0, T[$, mais alors la courbe $\tilde{\gamma} : [0, \infty[\to M$ définie par $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(T(1 - e^{-t}))$ ne est aussi entièrement contenue dans K, donc $\lim_{t \to \infty} \tilde{\gamma}(t) \in K$ par compacité de K. On a donc que $\gamma(T)$ est définie, et on a donc pronlongé γ, ce qui est une contradiction. Donc γ est une courbe divergente.

8.6. Voir Gallot-Hulin-Lafontaine 2.98, page 94.