| | |
|---|---|
| EPFL - Printemps 2021 | M. Troyanov, G. Buro |
| **Géométrie Riemannienne I** | **Corrigé** |
| Corrigé 9 | 10 Mai 2021 |

**9.1**. Reprendre la définition de la courbure et l'expression de $\nabla$ en fonction des symboles de Christoffel.

**9.2**. Un 2-plan $\Pi$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $T_pM$ (pour un certain $p$). Prenons une base $(X, Y)$ de ce plan. La courbure sectionnelle est définie par

$$K(X,Y) = \frac{R(X,Y,Y,X)}{\|X\|^2\|Y\|^2 - g(X,Y)^2}.$$

Pour montrer que cette définition ne dépend pas du choix de la base $(X, Y)$, prenons-en une autre, $(X', Y')$. Il existe alors des réels $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ et $\delta$ tels que

$$X' = \alpha X + \beta Y \quad \text{et} \quad Y' = \gamma X + \delta Y.$$

Il suffit ensuite de faire jouer les relations de linéarité de $R$ et du produit scalaire.

**9.3**. La quantité $\mathrm{Ric}(x, y)$ est par définition la trace de l'endomorphisme

$$v \mapsto R(x,v)y.$$

Ainsi

$$\mathrm{Ric}(x,y) = \sum_i R(x,e_i,y,e_i) = \sum_i R(y,e_i,x,e_i) = \mathrm{Ric}(y,x).$$

On a noté de la même manière le tenseur de courbure $(0, 4)$ et $(1, 3)$.

**9.4**. Notons tout d'abord que la connexion de Levi-Cività de $g$ et de $g'$ sont les mêmes ( ce qu'on montre en vérifiant que celle de $g$ vérifie toutes les axiomes de celle de $g'$). Il faut alors distinguer la courbure comme tenseur $(1, 3)$ (qui s'exprime uniquement à l'aide de la connexion et qui est donc inchangée) et la courbure $(0, 4)$ qui fait intervenir le produit scalaire. On a

$$R' = a^2 R.$$

On constate ensuite que $K$ est inchangée (un facteur $a^2$ au numérateur, un facteur $a^2$ au dénominateur).

**9.5**. (a) On cherche à calculer

$$\left\langle R\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right)\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right\rangle = \left\langle \nabla_r\nabla_\theta\frac{\partial}{\partial r} - \nabla_\theta\nabla_r\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right\rangle$$

avec le moins de calculs possibles (attention : par convention cette expression est l'opposée de la courbure). Montrons d'abord que $\nabla_\theta \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta)}{f(r,\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}$.
Pour celà on remarque que

$$\frac{\partial}{\partial r}\left\langle \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right\rangle = \frac{\partial}{\partial r} f(r,\theta)^2 = 2f(r,\theta)\frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta).$$

Mais d'autre part

$$\frac{\partial}{\partial r}\left\langle \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right\rangle = 2\left\langle \nabla_r\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right\rangle = 2\left\langle \nabla_\theta\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right\rangle$$

et aussi

$$0 = \frac{\partial}{\partial\theta}\left\langle \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right\rangle = 2\left\langle \nabla_\theta \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right\rangle.$$

On en déduit que $\nabla_\theta \frac{\partial}{\partial r}$ n'a qu'une composante selon $\frac{\partial}{\partial\theta}$ (disons $\nabla_\theta\frac{\partial}{\partial r} = \alpha(r,\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}$) et que

$$\left\langle \alpha\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial\theta}\right\rangle = \left\langle \nabla_\theta\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial\theta}\right\rangle = f(r,\theta)\frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta)$$

On en déduit $\alpha$ puis finalement

$$\nabla_\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(= \nabla_r\frac{\partial}{\partial\theta}\right) = \frac{\frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta)}{f(r,\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}.$$

Pour la suite, on sait déjà que

$$\nabla_r\frac{\partial}{\partial r} = 0$$

car les courbes $\theta =$constante sont géodésiques.

Vu l'expression de la courbure que l'on cherche à calculer, il n'y a pas besoin d'expliciter $\nabla_\theta\frac{\partial}{\partial\theta}$. (On pourrait le faire, par un raisonnement analogue, on trouverait d'ailleurs $\nabla_\theta\frac{\partial}{\partial\theta} = \frac{\frac{\partial f}{\partial\theta}(r,\theta)}{f(r,\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta)f(r,\theta)\frac{\partial}{\partial r}$.)

On a maintenant tout ce qu'il faut pour calculer la courbure (à partir de maintenant seules les dérivées partielles de $f$ par rapport à $r$ sont utilisées; on les notes pour simplifier $f'$) :

$$\nabla_r\nabla_\theta\frac{\partial}{\partial r} - \nabla_\theta\nabla_r\frac{\partial}{\partial r} = \nabla_r\nabla_\theta\frac{\partial}{\partial r} = \frac{f''f-(f')^2}{f^2}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{f'}{f}\nabla_r\frac{\partial}{\partial\theta} = \frac{f''}{f}\frac{\partial}{\partial\theta}.$$

Ainsi

$$\left\langle R\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial\theta}\right)\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial\theta}\right\rangle = f''f$$

Pour avoir la courbure sectionnelle, il faut encore diviser par la norme au carré de $\frac{\partial}{\partial\theta}$ (et prendre l'opposé). On trouve alors

$$-K = \frac{f''}{f},$$

ce qu'on voulait.

(b) Cela provient du fait que les métriques riemanniennes sont "infinitésimalement euclidiennes".

(c) On trouve $-1$ avec $f = \sinh$.

(d) Si $K = 0$, l'équation en $f$ se résout en $f(r,\theta) = r$. Si $K = 1$, on trouve $f(r,\theta) = \sin r$. Si $K = -1$, on retrouve le cas hyperbolique.

(e) On constate en effet que la métrique ne dépend que de la courbure, d'après la question précédente, une fois que l'on a choisi un ouvert de définition de l'exponentielle. On ne peut pas en général étendre l'isométrie en une isométrie globale (penser à $\mathbb{R}^2$ et à un tore, ou à $\mathbb{S}^2$ et à l'espace projectif, ou encore à deux surfaces compactes de genres différents et plus grands que 2).

**9.6**. On sait déjà que la courbure sectionnelle de la sphère est constante. Pour connaître la valeur de cette constante, il suffit de raisonner en dimension 2 puisque, étant données deux vecteurs tangents quelconques, ils sont tangents à une sous-sphère de dimension 2. On peut alors utiliser l'exercice précédant qui donne la valeur de la courbure d'une métrique en coordonnée polaires.

On obtient $K = 1$. Pour trouver la courbure de Ricci, fixons un point $p$ de la sphère et un vecteur $x$ en $p$, de norme 1. On peut compléter la base $(x)$ en une base orthonormée $(x, e_2, \cdots, e_n)$ de $T_p\mathcal{S}^n$. Alors,

$$\mathrm{Ric}(x,x) = \sum_{i=2}^{n} R(x, e_i, x, e_i) = \sum_i K(x, e_i) = n - 1.$$

Enfin, la courbure scalaire est la trace de la forme quadratique Ric, elle vaut donc

$$\mathrm{scal} = n(n-1).$$