10.1. Denote by (M,g) either the round sphere, the Euclidian space or the hyperbolic space. The key point is to show that the isometry group is transitive on the set (p,Π) where $p \in M$ and Π is a 2-dimensional subspace of T_pM. It is almost obvious for the sphere or the Euclidian space.

To deal with the case of the hyperbolic space, one needs a good description of the isometry group and in fact, one also needs another model for the hyperbolic space (the upper plane is not suitable for finding the isometry group). We demonstrate this using the Poincare Disc model. First using transitivity of the action of the isometry group, we can assume that the point p equals $0 \in \mathbb{B}^n$. Now the group $SO(n)$ acts by isometries of $\mathbb{B}^n$ fixing p. Then we prove that this group is sufficiently transitive on the set we want.

10.2. (i) (Thanks to Davide Paris for this solution) Recall that

$$\nabla\alpha(X,Y) = X(\alpha(Y)) - \alpha(\nabla_Y X),$$

Therefore, we have

$$\begin{aligned} d\alpha(X,Y) = 0 &\iff X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X,Y]) = 0; \\ &\iff X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha(\nabla_X Y - \nabla_Y X) = 0 \\ &\iff \nabla\alpha(X,Y) = \nabla\alpha(Y,X), \end{aligned}$$

where the second equivalence follows from the connection being symmetric, i.e. with vanishing torsion.

(ii) Follows from (i) since df is closed.

(iii) (Thanks to Davide Paris for this solution) Note that here we use the hypothesis that the connection is a Levi-Civita connection.

$$\nabla df(X,Y) = X(df(Y)) - df(\nabla_X Y) = X(g(\operatorname{grad} f, Y)) - g(\operatorname{grad} f, \nabla_X Y) = g(\nabla_X \operatorname{grad} f, Y),$$

where the second equality follows from the definition of df and the last one is the compatibility of the Levi-Civita connection

(iv) Assuming moreover the coordinates vector fields are orthonormal (if not introduce the function g_{ij}...), we set

$$X = \sum_i x_i \frac{\partial}{\partial_i},$$

$$Y = \sum_j x_j \frac{\partial}{\partial_j}$$

and

$$\operatorname{grad} f = \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial_k}.$$

Now we just have to unfold the previous concise expression using the definition of the Christoffel symbols. We find

$$\operatorname{Hess}_f(X,Y) = \sum_{ik} x_i y_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{ijk} x_i y_k \frac{\partial f}{\partial x_j}\Gamma^k_{ij}.$$

10.3. (i) **The connection**

For this we need some information about the Levi-Civita connection of (M, g). However it will be enough for our purpose to only compute it on some special vector fields. The vector fields we will consider which come from vector fields on each of the M_i.

Recall that, for every $p = (p_1, p_2) : in M_1 \times M_2$, $T_{(p_1,p_2)} M_1 \times M_2$ is canonically isomorphic to $T_{p_1} M_1 \times T_{p_2} M_2$, thus any vector $X_p \in T_p M$ can be uniquely written as $X_p = (X_1)_{p_1} + (X_2)_{p_2}$[1] where $(X_1)_{p_1} \in T_{p_1} M_1$ and $(X_2)_{p_2} \in T_{p_2} M_2$.

Now pick any vector field on M_1, $X_1 : p_1 \to (X_1)_{p_1} \in T_{p_1} M_1$. From this we can define a vector fields on M by $p = (p_1, p_2) \mapsto (X_1)_{p_1} \in T_{p_1} M_1 \subset T_p M$. We will also denote this vector field by X_1. Similarly from a vector field on X_2 we can define a vector field on M, that will also be denoted by M_2.

From now on every vector field which has 1 or 2 as a subscript comes from the above construction.

The Levi-Civita of (M, g) satisfies the following properties:

i. $\nabla_{X_1} Y_2 = \nabla_{Y_2} X_1 = 0$.
ii. $\nabla_{X_1} Y_1 = \nabla^1_{X_1} Y_1$[2],
iii. $\nabla_{X_2} Y_2 = \nabla^2_{X_2} Y_2$,

First let us prove that $\nabla_{X_1} Y_2 = 0$, we will use Koszul formula:

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) =& X \cdot g(Y, Z) + Y \cdot g(X, Z) - Z \cdot g(X, Y) \\ &+ g([X, Y], Z) - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X). \end{aligned}$$

Set $X = X_1$, $Y = Y_2$ and $Z = Z_1$ for now, we get:

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{X_1} Y_2, Z_1) =& X_1 \cdot g(Y_2, Z_1) + Y_2 \cdot g(X_1, Z_1) - Z_1 \cdot g(X_1, Y_2) \\ &+ g([X_1, Y_2], Z_1) - g([X_1, Z_1], Y_2) - g([Y_2, Z_1], X_1). \end{aligned}$$

This will vanish for the following reasons:

- The inner product of a vector on M_1 with a vector on M_2 is zero by definition of g.
- The Lie bracket of two vector fields on M_1 is again a vector field on M_1.
- The Lie bracket of a vector field on M_1 with a vector field on M_2 is zero.
- The inner product of two vectors on M_1, as a function on M, doesn't depend on p_2.

For instance $Y_2 \cdot g(X_1, Z_1)$ vanishes because $g(X_1, Z_1)$ is a function on M which depends only on p_1 and Y_2 has no component along M_1, and $g([X_1, Z_1], Y_2) = 0$ because $[X_1, Z_1]$ is a vector field on M_1 and Y_2 is a vector field on M_2.

Similarly one shows that $2g(\nabla_{X_1} Y_2, Z_2) = 0$, which will imply that $\nabla_{X_1} Y_2 = 0$. Hence property **1.** is proved.

For property **2.**, first show that $2g(\nabla_{X_1} Y_1, Z_2) = 0$, in a similar way to what we already did. Then, plugging only vector fields on M_1 in:

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{X_1} Y_1, Z_1) =& X_1 \cdot g(Y_1, Z_1) + Y_1 \cdot g(X_1, Z_1) - Z_1 \cdot g(X_1, Y_1) \\ &+ g([X_1, Y_1], Z_1) - g([X_1, Z_1], Y_1) - g([Y_1, Z_1], X_1). \end{aligned}$$

Since $g = g_1$ on vector fields from M_1, what we get is exactly the Koszul formula for ∇^1, this ends the proof that $\nabla_{X_1} Y_1 = \nabla^1_{X_1} Y_1$.

We have proved all we need about the connection now!

[1] We could also write $X_p = ((X_1)_{p_1}, (X_2)_{p_2})$.

[2] On the left, ∇ is applied to vector fields on M, on the right hand side, ∇^1 is applied to vector fields on M_1. Thus this equality makes sense only using the embedding of vector fields on M_1 to vector fields on M that we have seen before. You should keep that in mind.

The curvature

Let X be a vector field of the form $X = X_1 + X_2$ with X_1 a vector field on M_1 and X_2 a vector field on M_2. Similarly let $Y = Y_1 + Y_2$ and $Z = Z_1 + Z_2$. We have:

$$\begin{aligned}\nabla_X \nabla_Y Z &= \nabla_X \nabla_{Y_1+Y_2}(Z_1 + Z_2)\\ &= \nabla_{X_1+X_2}(\nabla^1_{Y_1} Z_1 + \nabla^2_{Y_2} Z_2)\\ &= \nabla^1_{X_1}\nabla^1_{Y_1} Z_1 + \nabla^2_{X_2}\nabla^2_{Y_2} Z_2.\end{aligned}$$

We can then get the curvature tensor from there:

$$R(X,Y)Z = R_1(X_1,Y_1)Z_1 + R_2(X_2,Y_2)Z_2.$$

(A similar formula holds for the $\binom{0}{4}$ tensor.)

(ii) Taking traces one gets:

$$Ric(X,Y) = Ric_1(X_1,Y_1) + Ric_2(X_2,Y_2)$$

and

$$Scal = Scal_1 + Scal_2.$$

(iii) Using the formula for R, we get that, for 2 vectors $u, v \in T_pM$:

$$K(u,v) = \begin{cases} K_1(u,v) & \text{if } u, v \in T_{p_1}M_1,\\ K_2(u,v) & \text{if } u, v \in T_{p_2}M_2,\\ 0 & \text{if } u \in T_{p_1}M_1, v \in T_{p_2}M_2.\end{cases}$$

In particular a product metric can never have everywhere non vanishing sectionnal curvature.

However it can have positive or negative Ricci curvature, for instance assume $Ric_1 = kg_1$ and $Ric_2 = kg_2$, then $Ric = k(g_1 \oplus g_2) = kg$. Similarly, on can have strictliy positive scalar curvature.

An interesting open question: *We know the sphere $\mathbb{S}^2$ with its standard metric has constant sectionnal curvature* 1.
In this exercise we proved that $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ with the product metric has nonnegative sectional curvature but does not have positive sectional curvature everywhere. It has been conjectured by Hopf that $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ cannot be endowed with a metric with (everywhere) positive sectional curvature, and this question has been opened for many decades.

10.4. La solution est dans la série 9

10.5. Soit g une métrique riemannienne. On va prouver que ∇ est la connexion de Levi-Civita de g si et seulement si ∇ est sans torsion et $\nabla g = 0$:
Comme g est un tenseur de type $\binom{0}{2}$, par définition de ∇g on a

$$X(g(Y,Z)) = (\nabla_X g)(Y,Z) + g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

pour $X, Y, Z \in \Gamma(M)$. Cela montre que ∇ est compatible avec la métrique g si et seulement si $\nabla g = 0$.

10.6. Si α est un 1-forme, on calcule les coefficients de $\nabla\alpha$ en coordonnées locales. Par definition de $\nabla\alpha$ on a pour toutes $X, Y \in \Gamma(M)$

$$\begin{aligned}
(\nabla_X\alpha)(Y) &= X(\alpha(Y)) - \alpha(\nabla_X Y) \\
(\nabla_X\alpha)_i Y^i &= X(\alpha_i Y^i) - \alpha_k(\nabla_X Y)^k \\
(\nabla_X\alpha)_i Y^i &= (X(\alpha_i)Y^i + \alpha_i X(Y^i)) - \alpha_k(X(Y^k) + \Gamma^k_{ji}X^j Y^i) \\
(\nabla_X\alpha)_i Y^i &= X(\alpha_i)Y^i - \alpha_k\Gamma^k_{ji}X^j Y^i
\end{aligned}$$

Cette équation est valable pour chaque Y, donc

$$(\nabla_X\alpha)_i = X(\alpha_i) - \Gamma^k_{ji}X^j\alpha_k.$$

On peut aussi prouver que si α est une 1-forme et ∇ est une connexion sans torsion, alors

$$d\alpha(X,Y) = (\nabla_X\alpha)(Y) - (\nabla_Y\alpha)(X).$$

Par définition de $d\alpha$ on a

$$\begin{aligned}
d\alpha(X,Y) &= X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X,Y]) \\
&= (\nabla_X\alpha)(Y) + \alpha(\nabla_X Y)) - (\nabla_Y\alpha)(X) - \alpha(\nabla_Y X) - \alpha(\nabla_X Y - \nabla_Y X) \\
&= (\nabla_X\alpha)(Y) - (\nabla_Y\alpha)(X).
\end{aligned}$$

10.7. La solution se trouve da le Gallot-Hulin-Lafontaine, page 84.

10.8.

10.9. **Exercice sur le tenseur d'Einstein**

Rappelons que le *tenseur d'Einstein* d'une variété riemannienne (M, g) est le $\binom{0}{2}$ tenseur défini par $G = \mathrm{Ric} - \frac{S}{2} \cdot g$ où S est la courbure scalaire de g.

Question (i): Il faut montrer que $G = 0$ si et seulement si $\mathrm{Ric} = 0$. Ce résultat est vrai seulement si $n \geq 3$. En effet la contraction (trace) de G est

$$\sum_i G(E_i, E_i) = S - \frac{n}{2}S = 0 \quad \Rightarrow \quad S = 0$$

où $\{E_1, \ldots, E_n\}$ est une base orthonormée de T_pM. Donc $G = 0$ implique $\mathrm{Ric} = \frac{1}{2}S = 0$. Le sens inverse $\mathrm{Ric} = 0 \Rightarrow G = 0$ est immédiat puisque S est la contraction (trace) de Ric.

Supposons que $G + \Lambda g = 0$ pour une constante Λ, alors en contractant à nouveau on a

$$0 = \sum_i G(E_i, E_i) + \Lambda n = (1 - \frac{n}{2})S + n\Lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad S = \frac{2}{n-2}\Lambda$$

et donc

$$\mathrm{Ric} = \frac{1}{2}Sg + G = \frac{1}{n-2}\Lambda g - \Lambda g = -\frac{n-1}{n-2}\Lambda g.$$

Remarque Une métrique riemannienne vérifiant cette condition s'appelle une *métrique d'Einstein* (terminologie en usage chez les mathématiciens, plutôt que chez les physiciens). Remarquons que cette condition dit que la courbure de Ricci est constante.

Question (ii): Il faut montrer que $\operatorname{div}(G) = 0$.

Rappelons d'abord que la dérivée covariante d'un tenseur T de type $\binom{0}{k}$ est le tenseur ∇T de type $\binom{0}{k+1}$ défini par

$$\nabla T(X_1, \dots, X_k; Z) = Z(T(X_1, \dots, X_k)) - \sum_{j=1}^{k} T(X_1, \dots, \nabla_Z X_j, \dots X_k).$$

La *divergence* de T est le tenseur de type $\binom{0}{k-1}$ obtenu par contraction (trace) de ∇T :

$$\operatorname{div}(T)(X_1, \dots, X_{k-1}) = \sum_{i=1}^{n} \nabla T(X_1, \dots, X_{k-1}, E_i; E_i)$$

où $\{E_1, \dots, E_n\}$ est une base orthonormée de T_pM. Rappelons aussi que le tenseur de Ricci et la courbure scalaires sont définis par

$$\operatorname{Ric}(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} R(E_i, X, Y, E_i) = \sum_{i=1}^{n} R(X, E_i, E_i, Y)$$

et

$$S = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Ric}(E_j, E_j).$$

On vérifie que ces définitions ne dépendent pas du choix de la base orthonormée considérée.

Exemples et remarques Nous laissons le lecteur se convaincre des faits suivants :

a) Si $f \in C^\infty(M)$ (i.e. f est un 0-tenseur), alors $\nabla f = df$ et $\operatorname{div}(f)$ n'est *a priori* pas défini (on pose dans ce cas $\operatorname{div}(f) = 0$.
b) $\nabla g = 0$ et donc $\operatorname{div} g = 0$ (où g est le tenseur métrique).
c) $\nabla(fT) = T \otimes df + f \nabla T$.
d) $\operatorname{div}(fT) = \operatorname{Tr}(T \otimes df) + f \operatorname{div}(T)$ (ici $\operatorname{Tr}(T \otimes df)$ signifie la contraction sur les deux derniers indices).
e) $\operatorname{div}(fg) = df$ (où $f \in C^\infty(M)$ et g est le tenseur métrique).
f) En général $\nabla(T \otimes S) \neq (\nabla T) \otimes S + T \otimes (\nabla S)$ et $\operatorname{div}(T \otimes S) \neq (\operatorname{div} T) \otimes S + T \otimes (\operatorname{div} S)$ (attention, c'est une erreur fréquente, y compris dans certains livres).

Notons R le $\binom{0}{4}$ tenseur de courbure de Riemann. Rappelons la seconde identité de Bianchi :

$$\nabla R(X, Y, Z, T; W) + \nabla R(X, Y, W, Z; T) + \nabla R(X, Y, T, W; Z) = 0.$$

Dans le cas où $Z = X$ et $T = Y$, cette identité devient

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla R(X, Y, X, Y; W) + \nabla R(X, Y, W, X; Y) + \nabla R(X, Y, Y, W; X) \\ &= -\nabla R(X, Y, Y, X; W) + \nabla R(X, Y, W, X; Y) + \nabla R(X, Y, Y, W; X) \end{aligned}$$

Contractons cette identité en X (i.e. on pose $X = E_i$ et on somme pour $i = 1, \ldots, n$), on obtient alors

$$0 = -\nabla \operatorname{Ric}(Y, Y; W) + \nabla \operatorname{Ric}(Y, W; Y) + \sum_{i=1}^{n} \nabla R(E_i, Y, Y, W; E_i).$$

Si maintenant on contracte en Y (i.e. on pose $Y = E_j$ et on somme), on obtient (on traite séparément chacun des termes):

- $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \nabla \operatorname{Ric}(E_j, E_j; W) = \nabla \left(\sum_{j=1}^{n} \operatorname{Ric}(E_j, E_j) \right)(W) = \nabla S(E) = dS(W),$
- $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \nabla \operatorname{Ric}(E_j, W; E_j) = \sum_{j=1}^{n} \nabla \operatorname{Ric}(W, E_j; E_j) = \operatorname{div}(\operatorname{Ric})(W)$

et

- $$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \nabla R(E_i, E_j, E_j, W; E_i) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \nabla R(E_i, E_j, E_j, W; E_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \nabla \operatorname{Ric}(E_i, W; E_i) = \sum_{i=1}^{n} \nabla \operatorname{Ric}(W, E_i; E_i) \\ &= \operatorname{div}(\operatorname{Ric})(W).\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}0 &= -\nabla \operatorname{Ric}(Y, Y; W) + \nabla \operatorname{Ric}(Y, W; Y) + \sum_{i=1}^{n} \nabla R(E_i, Y, Y, W; E_i) \\ &= -dS(W) + 2 \operatorname{div}(\operatorname{Ric})(W).\end{aligned}$$

On a ainsi prouvé que

$$\operatorname{div}(\operatorname{Ric}) = \frac{1}{2} dS. \tag{1}$$

On conclut que

$$\operatorname{div}(G) = \operatorname{div}\left(\operatorname{Ric} - \frac{1}{2} S g\right) = \operatorname{div}(\operatorname{Ric}) - \frac{1}{2} \operatorname{div}(Sg) = 0$$

(car $\operatorname{div}(Sg) = dS$).

Complément. Un corollaire de la formule (1) est que si $\operatorname{Ric} = fg$ pour une certaine fonction f, alors f est constante (on suppose la variété connexe), et donc $(M.g)$ est une variété d'Einstein.

Le preuve est simple : si $\operatorname{Ric} = fg$ alors

$$\frac{1}{2} dS = \operatorname{div}(\operatorname{Ric}) = \operatorname{div}(fg) = df.$$

Mais d'autre part $dS = d(\operatorname{Tr} \operatorname{Ric}) = d(\operatorname{Tr} fg) = ndf$. Donc $ndf = dS = 2df$ ce qui entraîne $df = 0$ si $n > 2$.

Remarques 1. En relativité générale, l'*équation d'Einstein* est l'équation qui gouverne la gravitation de l'espace-temps (qui est une variété Lorentzienne). Elle s'écrit

$$G = T$$

où G est le tenseur d'Einstein et T est le *tenseur d'énergie-impulsion*, qui représente la distribution de masse et d'énergie dans l'espace-temps. L'équation d'Einstein est donc une égalité entre un terme géométrique (le tenseur G dérivé du tenseur de courbure de Riemann) et un terme physique (le tenseur T), ainsi on a une équation "courbure = énergie". Inspiré par la mécanique des milieux continu, Einstein a *imposé* à la théorie la condition que T doit être de divergence nulle. Il a ensuite recherché le bon tenseur géométrique G, de type $\binom{0}{2}$ dérivé du tenseur de courbure et qui est de divergence nulle.

2. En comparant les calculs qui précèdent avec ceux d'autres sources, il faut faire attention aux définitions choisies, notamment au choix du signe pour le tenseur de courbure de Riemann R.

La notion de dérivée covariante d'un tenseur est parfois définie par la formule

$$\nabla T(Z, X_1, \dots, X_k) = Z(T(X_1, \dots, X_k)) - \sum_{j=1}^{k} T(X_1, \dots, \nabla_Z X_j, \dots X_k).$$

(la différente est la place du vecteur Z).