11.1. Notons tout d'abord que la connexion de Levi-Cività de g et de g' sont les mêmes (ce qu'on montre en vérifiant que celle de g vérifie toutes les axiomes de celle de g'). Il faut alors distinguer la courbure comme tenseur $(1,3)$ (qui s'exprime uniquement à l'aide de la connexion et qui est donc inchangée) et la courbure $(0,4)$ qui fait intervenir le produit scalaire. On a

$$R' = a^2 R.$$

On constate ensuite que K est inchangée (un facteur a^2 au numérateur, un facteur a^2 au dénominateur).

11.2. Remarquer que S est totalement géodésique, donc sa deuxième forme fondamentale est nulle, donc la solution vient directement de la formule de Gauss.

11.3. (a) C'est une application directe de la formule de Gauss, en choisissant un des vecteurs dans la direction d'une géodésique.

(b) Un surface réglée dans une variété quelconque est une surface M telle que par tout point $p \in M$, il passe un segment de géodésique de la variété ambiante qui contient p et qui est entièrement contenu dans M. On généralise le résultat en utilisant à nouveau la formule de Gauss.

11.4. (i) In dimension 2, there is only one plane in a given tangent space T_pM,let us denote its sectional curvature by k_p. Let e_1, e_2 be an orthonormal basis of T_pM Then:

$$Ric(e_1, e_1) = trace(X \mapsto R(X, e_1)e_1) = g(R(e_1, e_1)e_1, e_1) + g(R(e_2, e_1)e_1, e_2) = 0 + k_p.$$

Similarly $Ric(e_2, e_2) = k_p$. Hence $Scal = trace(Ric) = 2k_p$.

(ii) We assume that M has dimension 3 and is Einstein, that is $Ric = \lambda g$, thus for any unit vector v in T_pM $Ric(v, v) = \lambda$. Now pick any plane $\Pi \subset T_pM$, and let e_1, e_2, e_3 be an orthonormal basis of T_pM such that e_1, e_2 is an orthonormal basis of Π. We compute:

$$\lambda = Ric(e_1, e_1) = K(e_1, e_2) + K(e_1, e_3).$$

Doing this for $Ric(e_2, e_2)$ and $Ric(e_3, e_3)$, and writing K_{ij} for $K(e_i, e_j)$, we get the system:

$$\begin{cases} K_{12} + K_{13} = \lambda \\ K_{12} + K_{23} = \lambda \\ K_{13} + K_{23} = \lambda. \end{cases}$$

This is an invertible system in the K_{ij}, whose only solution is given by $K_{12} = K_{13} = K_{23} = \lambda/2$. In the end $K(\Pi) = \lambda/2$, and hence doesn't depend on Π. We're done.
We have already studied $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ with its product metric and have seen that it was Einstein and didn't have constant sectional curvature.

11.5. a) C'est une reformulation de la règle $Zg(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$.

b) On a

$$\begin{aligned}
(\nabla_X\omega)(Y)-(\nabla_Y\omega)(X) &= (X(\omega(Y))-\omega(\nabla_X Y))-(Y(\omega(X))-\omega(\nabla_Y X)) \\
&= (X(\omega(Y))-Y(\omega(X)))-(\omega(\nabla_X Y)-\omega(\nabla_Y X)) \\
&= (X(\omega(Y))-Y(\omega(X)))-\omega([X,Y]) \\
&= d\omega(X,Y).
\end{aligned}$$

c) Le même calcul montre que $d\omega(X,Y)=(\nabla_X\omega)(Y)-(\nabla_Y\omega)(X)+\omega(T(X,Y))$ où $T(X,Y)=\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y]$ est le tenseur de torsion.

11.6. Une étape importante de la preuve qui suit consiste à montrer que les endomorphismes d'un espace vectoriel forment une algèbre de Lie pour le crochet

$$(A,B)\mapsto [A,B]=AB-BA.$$

On en déduit en particulier que le crochet des endomorphismes vérifie l'identité de Jacobi

$$[A,[B,C]]+[C,[A,B]]+[B,[C,A]]\,,$$

ce qu'on peut aussi vérifier directement.

Une deuxième remarque est que la courbure s'exprime à l'aide de ce crochet d'endomorphisme. En effet,

$$R(X,Y)=[\nabla_X,\nabla_Y]-\nabla_{[X,Y]}.$$

L'égalité précédente étant une égalité en chaque point de M entre endomorphismes de T_pM.

Enfin on choisit des coordonnées $(x_1,\cdots,x_n)$ de sorte que

$$[\partial_i,\partial_j]=0 \quad \text{et} \quad (\nabla_{\partial_i}\partial_j)_{|p}=0$$

(des coordonnées normales conviennent).

La stratégie consiste alors à faire apparaître la relation à prouver comme une conséquence de l'identité de Jacobi pour l'algèbre de Lie des endomorphismes. Puisque la relation à montrer est tensorielle, on peut supposer que les champs sont des champs de coordonnées.

On a alors $\nabla R(X,Y,U,V,W)=\nabla R(U,V,X,Y,W)=W\cdot R(U,V,X,Y)$ puisque le second terme fait intervenir un crochet. Puis

$$\nabla R(X,Y,U,V,W)=W\cdot <[\nabla_U,\nabla_V]\,X,Y>$$

(encore une fois le terme manquant est un terme avec un crochet). On utilise maintenant la propriété de Levi-Cività :

$$\nabla R(X,Y,U,V,W)=<\nabla_W\,[\nabla_U,\nabla_V]\,X,Y>=<[\nabla_W,[\nabla_U,\nabla_V]]\,X,Y>$$

(il manque encore un terme avec un crochet). On conclut finalement en factorisant la somme des 3 termes par une identité de Jacobi pour les endomorphismes.