EPFL - Printemps 2018	M. Troyanov, G. Buro
Géométrie Riemannienne I	**Corrigés**
Corrigé 13	29 mai 2018

13.1. La solution se trouve dans le chapitre 9 de Do Carmo.

13.2. *Cet exercice est difficile et demande des notions sur le revêtement universel, tout n'est pas détaillé dans la correction.*

Pour montrer ceci, il faut utiliser le revêtement universel. On se fixe un point sur γ_1, par exemple $\gamma_1(0) = p$. Soit $\pi : \tilde{M} \to M$ le revêtement universel de M, muni de la métrique $\tilde{g} := \pi^\star g$ induisant la distance $\tilde{d}$ et soient $\tilde{\gamma}_1$ et $\tilde{\gamma}_2$ les relevés de γ_1 et γ_2. En fixant un point dans la fibre au dessus de p, on a que $\tilde{\gamma}_1$ est uniquement déterminé, de même, le relevé de la géodésique réalisant la distance entre p et γ_2 est uniquement déterminée, et donc le relevé de γ_2 est aussi uniquement déterminé.

Alors $(\tilde{M}, \tilde{g})$ est complète, à courbure négative ou nulle et simplement connexe. On peut donc appliquer le théorème de Cartan-Hadamard, qui nous dit que dans ce cas $\exp_p : T_p\tilde{M} \to \tilde{M}$ est un difféomorphisme. On a alors que $\Phi : T\tilde{M} \to \tilde{M} \times \tilde{M}$ donné par $\Phi(p, v) = (p, \exp_p(v))$ est aussi un difféomorphisme et donc, en considérant $(\tilde{\gamma}_1(s), \tilde{\gamma}_2(s)) \in \tilde{M} \times \tilde{M}$ on a l'existence d'une géodésique entre ces deux points de $\tilde{M}$ et la différentiabilité de $\eta_s(t)$ en s.

On peut donc appliquer la formule de variation seconde à $\tilde{f}(t) = \tilde{d}(\tilde{\gamma}_1(t), \tilde{\gamma}_2(t)) = \ell(\eta_s)$ pour montrer que c'est une fonction convexe.

Maintenant, comme on sait que f est periodique (disons de période L), par définition de l'action du groupe fondamental sur la fibre et le fait que γ_1 et γ_2 soient homotopes, on a

$$\tilde{d}(\tilde{\gamma}_1(s+L), \tilde{\gamma}_2(s+L)) = \tilde{d}(\gamma_1.\tilde{\gamma}_1(s), \gamma_2.\tilde{\gamma}_2(s)) = \tilde{d}(\gamma_1.\tilde{\gamma}_1(s), \gamma_1.\tilde{\gamma}_2(s)) = \tilde{d}(\tilde{\gamma}_1(s), \tilde{\gamma}_2(s)).$$

Par conséquent, $\tilde{f}$ est constante. Si $\tilde{f}$ est constante, alors f est également constante car en passant au revêtement universel, on a montré que f était localement constante, or au début on a choisi $\gamma_1(0)$ comme point de base de manière arbitraire, donc f est constante partout.

13.3. La solution se trouve p.114-115 de Do Carmo. Pour calculer le développement à n'importe quel ordre, il peut être utile de montrer la formule générale suivante:

$$\langle J, J\rangle^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \langle \nabla^{n-k} J, \nabla^k J\rangle.$$

On démontre cette formule par récurrence exactement de la même manière que la formule du binôme de Newton.

13.4. a) En utilisant l'exercice précédent ainsi que les propriétés des champs $E_1, \dots, E_n$, on obtient

$$\begin{aligned}
\nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma}(Y) + R(Y\dot\gamma, \dot\gamma) &= \nabla_{\dot\gamma}(\sum_{i=1}^{n} \dot\gamma[y_i]E_i) + \sum_{i=1}^{n} y_i R(E_i, \dot\gamma)\dot\gamma \\
&= \sum_{i=1}^{n} \dot\gamma[\dot{y}_i]E_i + k\sum_{i=1}^{n} y_i(g(\dot\gamma, \dot\gamma)E_i - g(E_i, \dot\gamma)\dot\gamma) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \ddot{y}_i E_i + k\sum_{i=1}^{n-1} y_i E_i \ .
\end{aligned}$$

Donc Y est un champ de Jacobi si et seulement si ce champ s'annule, c'est-à-dire si et seulement si $\ddot{y}_i + ky_i = 0$ pour $i = 1, \dots, n-1$ et $\ddot{y}_n = 0$.

b) Si $k=0$, on obtient $y_i(t)=\alpha_i t+\beta_i$, où α_i et β_i sont des constantes et $i=1,\dots,n$.
Si $k>0$, on obtient $y_i(t)=\alpha_i\cos(\sqrt{k}\,t)+\beta_i\sin(\sqrt{k}\,t)$ pour $i=1,\dots,n-1$ et $y_n(t)=\alpha_n t+\beta_n$.
Si $k<0$, on obtient $y_i(t)=\alpha_i\cosh(\sqrt{-k}\,t)+\beta_i\sinh(\sqrt{-k}\,t)$ pour $i=1,\dots,n-1$ et $y_n(t)=\alpha_n t+\beta_n$.

13.5. Soit $E_1,\dots,E_n$ des champs de vecteurs le long de γ tels que $\langle E_i,E_j\rangle=\delta_{ij}$, $\nabla_{\dot\gamma}E_i=0$ et $E_n=\dot\gamma$ (on sait que de tels champs existent). On peut alors écrire $Y=\displaystyle\sum_{i=1}^{n} yE_i$. On suppose que Y est un champ de Jacobi, on obtient donc

$$\nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma}(Y)+R(Y,\dot\gamma)\dot\gamma=\sum_{i=1}^{n}\ddot\gamma E_i+y_iR(E_i,E_n)E_n=\sum_{i=1}^{n}\left(\ddot y_i+\sum_{k=1}^{n}y_kR^i_{knn}\right)E_i=0\ ,$$

qui est une équation différentielle (du second degré) dans un espace de dimension n. Les conditions $Y(0)=Y_0$ et $\nabla_{\dot\gamma(0)}Y=Y_0'$ fournissent les conditions initiales de ce problème, dont la solution est alors unique et par conséquent égale à Y.