M2.L1 et M2.L2 : Série d'exercices sur les signaux [Solutions]

1 Signaux périodiques et apériodiques

a) Oui, dans ce cas, $X_1(t) + X_2(t)$ est périodique de même période T. En effet:

$$X_1(t + T) + X_2(t + T) = X_1(t) + X_2(t) \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

b) Dans ce cas, la réponse n'est pas forcément oui: ça dépend si le rapport T_1/T_2 est rationnel (auquel cas le signal est périodique) ou non (auquel cas le signal est apériodique). Avec les deux exemples donnés dans l'énoncé, on voit bien graphiquement que le premier signal est périodique, tandis que le second ne l'est pas.

c) Dans le cas où T_1 et T_2 sont des nombres entiers, le rapport T_1/T_2 est justement un nombre rationnel, donc le signal est périodique et sa période est le plus petit commun multiple de T_1 et T_2:

$$\text{ppcm}(T_1,T_2) = \min\{N \geq 1 : \text{il existe } k,l \geq 1 \text{ tels que } N = kT_1 = lT_2\}.$$

On peut le voir graphiquement, ou en vérifiant la formule suivante:

$$X_1(t + N) + X_2(t + N) = X_1(t + kT_1) + X_2(t + lT_2) = X_1(t) + X_2(t).$$

d) La période de la sinusoïde fondamentale est $T_1 = 1/f_0$, et les périodes des harmoniques sont de la forme $T_n = 1/(nf_0)$. Ainsi, T_0 est le plus petit commun multiple de toutes ces périodes, et le signal est donc périodique de période T_0 (à nouveau, ceci se voit bien graphiquement).

2 Fréquence d'échantillonnage

Rappelons que $f_1 > f_2 > 0$.

a) $X_1(t) = \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t)$: la condition ici est que $f_e > 2f_1$ (f_1 étant la plus grande fréquence présente dans le signal, i.e. la bande passante).

b) $X_2(t) = 2\cos(2\pi f_1 t) - \sin(2\pi f_2 t + \pi/4)$: idem. La condition ici est que $f_e > 2f_1$ (les amplitudes et déphasages ne jouent aucun rôle).

c) $X_3(t) = \sin(4\pi f_1 t) + \sin(2\pi(f_1 + f_2)t)$: les deux fréquences des sinusoïdes sont respectivement: $2f_1$ et $f_1 + f_2$. Vu que $f_1 > f_2$, il faut donc échantillonner le signal à une fréquence $f_e > 4f_1$.

d) $X_4(t) = \sin(2\pi f_1 t) \cdot \sin(2\pi f_2 t)$: ici, un petit calcul s'impose (cf. résumé de trigonométrie):

$$\sin(2\pi f_1 t) \cdot \sin(2\pi f_2 t) = \frac{1}{2}\ (\cos(2\pi(f_1 - f_2)t) - \cos(2\pi(f_1 + f_2)t))$$

donc la plus grande fréquence présente dans le signal est $f_1 + f_2$. Il faut échantillonner le signal à une fréquence $f_e > 2(f_1 + f_2)$.

d) $X_5(t) = \cos(2\pi f_1 t) \cdot \sin(2\pi f_2 t)$:

$$\cos(2\pi f_1 t) \cdot \sin(2\pi f_2 t) = \frac{1}{2}\left(\sin(2\pi(f_1 + f_2)t) - \sin(2\pi(f_1 - f_2)t)\right)$$

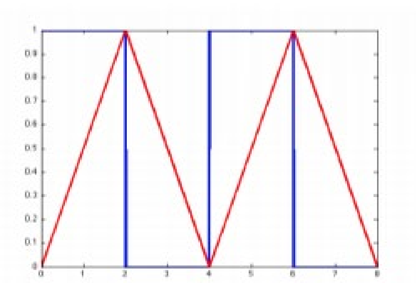
donc il n'y a aucune différence. La plus grande fréquence est $f_1 + f_2$ et il faut échantillonner le signal à une fréquence $f_e > 2(f_1 + f_2)$. Il faut se rappeler qu'un sinus est rien moins qu'un cosinus avec un déphasage et les déphasages n'ont pas d'influence sur les fréquences.

3 Interlude musical

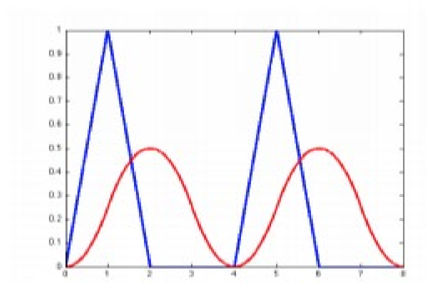
a) La taille du fichier est de 3.5 × 60 × 44000 × 32 = 296 Mbits (Environ 35 Mo).

4 Filtre à moyenne mobile

a) Après un passage à travers un filtre à moyenne mobile de période $T_c = T$, on vérifie d'abord que les signaux $\hat{X}_1(t)$ et $\hat{X}_3(t)$ sont tous les deux constants au cours du temps et prennent la valeur 1/2. Voici maintenant les formes des signaux $\hat{X}_2(t)$ et $\hat{X}_4(t)$ après passage à travers le même filtre à moyenne mobile (sur les graphes ci-dessous, $T = 2$):



$\hat{X}_2(t)$



$\hat{X}_4(t)$

Attention : **la courbe de $\hat{X}_4(t)$ est constituée de morceaux de paraboles**

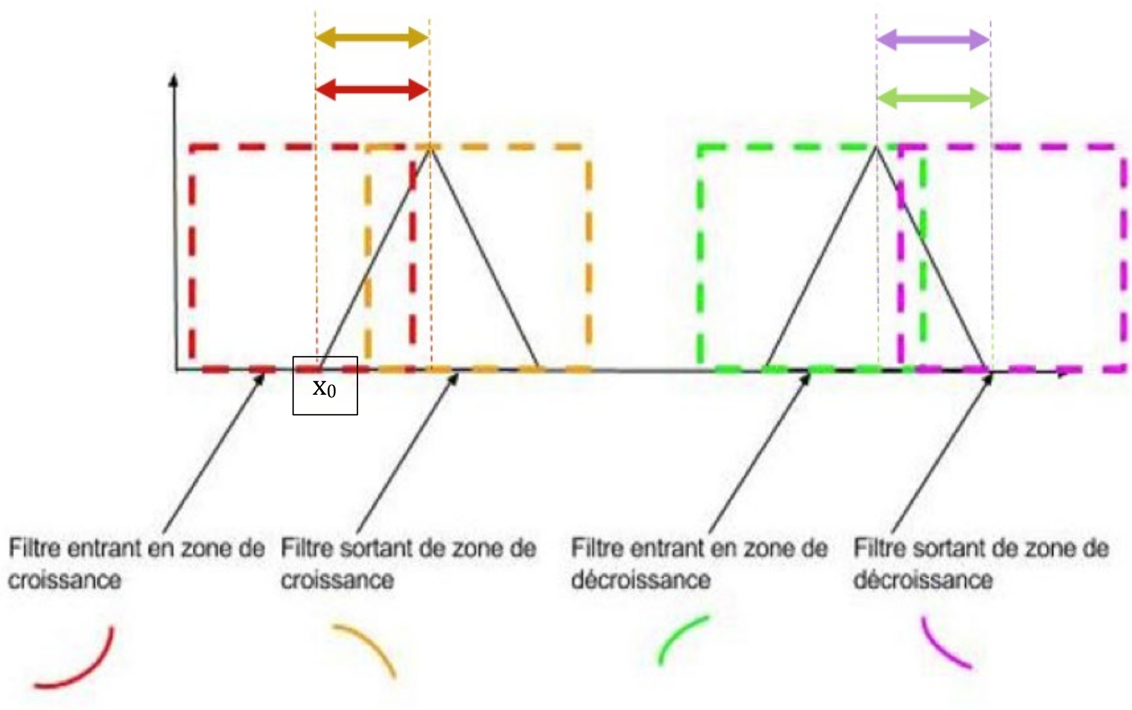
Le signal $\hat{X}_2(t)$ est constitué de fonctions linéaires par morceaux. Ceci peut être expliqué intuitivement en analysant la variation de l'intégrale sur le filtre. En effet, lorsque le filtre est en train de "sortir" d'une zone de signal 1, pour chaque unité de déplacement supplémentaire "dx", l'intégrale $\hat{X}_2(t)$ perd aussi "dx*1". Donc d $\hat{X}_2(t)$ / dx = -1. De la même manière lorsque le filtre "entre" dans une zone positive, l'intégrale gagne "dx*1" et d $\hat{X}_2(t)$ / dx = 1. Comme la période est égale à 2 fois la taille du filtre, on alterne entre des segments de droite de pente opposée.

On peut utiliser le même type d'analyse pour $\hat{X}_4(t)$, qui est en fait constitué d'un enchaînement de bouts de paraboles. En effet, lorsque le filtre est en train de "sortir" d'une zone de signal croissant (cf coté gauche de l'intervalle avec la double flèche orange ; quand le coté gauche du filtre orange part de x_0 dans la figure ci-dessous), pour chaque unité de déplacement supplémentaire "dx", l'intégrale $\hat{X}_4(t)$ perd aussi "$(x - x_0)dx$" avec x_0 *correspondant à l'abscisse du pied gauche du triangle*[1].

Donc, $d\hat{X}_4(t) / dx = -(x - x_0)$. Cette quantité n'est pas une constante comme pour l'exemple précédent ; elle augmente linéairement avec la valeur de x. C'est pourquoi sa primitive est un morceau de parabole.

De la même manière lorsque le filtre "entre" dans une zone de signal croissant (quand le coté droit du filtre rouge entre dans la zone avec la double flèche rouge qui commence en x_0), l'intégrale gagne "$(x - x_0)dx$" et $d\hat{X}_4(t) / dx = (x - x0)$ qui est une quantité qui augmente linéairement avec x. D'où le morceau de parabole pour sa primitive.

On fait le même raisonnement pour les périodes où le filtre entre (filtre vert) et sort (filtre violet) de zones décroissantes. On obtient ainsi la confirmation que le signal est composé de bouts de paraboles et on a le signe du terme de plus haut degrés. Comme le signal de base est continu, on sait que la dérivée de la version filtrée est continue. En outre, on connaît les extrema de la fonction $\hat{X}_4(t)$ -- 0 et 1--, ce qui nous permet de dessiner le graphe du résultat son filtrage à moyenne mobile assez fidèlement.



Les doubles flèches <-->, correspondent aux zones où le signal initial est non nul et qui produit un morceau de parabole dont le signe dépend de la position du filtre par rapport au triangle.

[1] On observe sur le dessin de X_4 que la pente ascendante (resp. descendante) du triangle est de 1 (resp. -1)

b) Un signal périodique de période T sort constant d'un filtre à moyenne mobile de période $T_c = T$.

Pour $0 \leq t \leq T$, on le voit au moyen de la formule suivante:

$$\begin{aligned}
\hat{X}(t) &= \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} X(s)\,ds = \frac{1}{T}\left(\int_{t-T}^{0} X(s)\,ds + \int_{0}^{t} X(s)\,ds\right) \\
&= \frac{1}{T}\left(\int_{t-T}^{0} X(s+T)\,ds + \int_{0}^{t} X(s)\,ds\right) = \frac{1}{T}\left(\int_{t}^{T} X(s)\,ds + \int_{0}^{t} X(s)\,ds\right) \\
&= \frac{1}{T}\int_{0}^{T} X(s)\,ds
\end{aligned}$$

Les exemples $X_1(t)$ et $X_3(t)$ du point a) illustrent bien ce fait.

c) On a vu en cours que

$$\hat{X}(t) = \frac{1}{T_c}\int_{t-T_c}^{t} \sin(2\pi f s)\,ds = \frac{\cos(2\pi f(t-T_c)) - \cos(2\pi f t)}{2\pi f T_c}$$

En utilisant une des formules du rappel de trigonométrie, on trouve que

$$\hat{X}(t) = \frac{2\sin(2\pi f(t-T_c/2))\,\sin(\pi f T_c)}{2\pi f T_c}$$

Donc pour tout $t \in \mathrm{R}$, on a

$$|\hat{X}(t)| \leq \left|\frac{\sin(\pi f T_c)}{\pi f T_c}\right| = |\mathrm{sinc}(f T_c)|$$

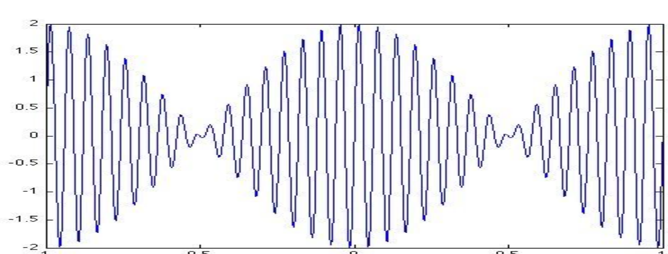
Lorsque que la période $T = 1/f$ de la sinusoïde coïncide avec la période T_c du filtre à moyenne mobile, le signal sortant est nul, ce qui est encore un cas particulier de ce qu'on a trouvé au point b).

5 Accordage de guitare et phénomène dit de "battement"

a) Lorsque $f_2 = f_1 + \varepsilon$, avec ε petit mais non nul, on trouve que (cf. encore une fois le rappel de trigonométrie)

$$X_1(t) + X_2(t) = \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t) = 2\cos(\pi(f_2 - f_1)t)\,\sin(\pi(f_1 + f_2)t) = 2\cos(\pi\varepsilon t)\,\sin(\pi(2f_1 + \varepsilon)t).$$

Cette onde est donc faite d'une composante qui oscille lentement ($\cos(\pi\varepsilon t)$) et d'une autre qui oscille rapidement ($\sin(\pi(2f_1 + \varepsilon)t)$). Elle ressemble à ceci (pour $f_1 = 16$Hz et $f_2 = 17$Hz):



C'est la composante qui oscille lentement que l'on entend clairement à l'oreille.

b) Lorsque $f_2 = f_1$, l'onde résultante est simplement:

$$X_1(t) + X_2(t) = \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_1 t) = 2\sin(2\pi f_1 t).$$

Dans ce cas, l'amplitude est doublée (remarquez qu'on avait aussi un facteur 2 dans le premier cas), mais on n'entend pas de battement.

Deux illustrations intéressantes du phénomène de battement sont disponibles ici:
http://fr.wikipedia.org/wiki/Battement
http://fr.wikipedia.org/wiki/Battement binaural

6 Un peu de radio

$$\lambda = \frac{c}{f_s}$$

$$L = \frac{\lambda}{4} = \frac{c}{4f_s} = \frac{3 \times 10^8}{4 \times 10^3} = \frac{3}{4} \times 10^5$$

Une antenne de 75 km de long ne se prête pas à des applications concrètes! Par contre, pour le signal $A(t)$ dont les fréquences sont proches de 300kHz, une longueur d'antenne de

$$L = \frac{\lambda}{4} = \frac{c}{4f_p} = \frac{3 \times 10^8}{4 \times 3 \times 10^5} = \frac{1}{4} \times 10^3$$

est suffisante (dans la pratique, on se débrouille avec des antennes plus petites encore).

b) Observons la figure en haut de la page 4 de la série: le signal utile est S(t). Or S(t) est multiplié par la porteuse qui produit de très nombreuses oscillations quasiment symétriques autour de l'axe des X. Or un filtre à moyenne mobile calcule l'intégrale sur une fenêtre qui va englober plusieurs périodes de la porteuse et lorsqu'on intègre une fonction sin sur une ou plusieurs périodes la surface au-dessus de l'axe des X équilibre celle en-dessous de l'axe des X et on obtient 0. Donc on n'arrive pas à extraire S(t) en appliquant un tel filtre à moyenne mobile sur le signal modulé.

Par contre en multipliant une seconde fois par la porteuse, comme expliqué dans la réponse suivante, sa contribution passe au carré et est toujours positive. Lorsqu'on filtre avec un filtre à moyenne mobile il n'y a plus cet équilibre entre surface au-dessus et au-dessous de l'axe des X, et cela permet de récupérer la forme du signal utile S(t). Une figure est fournie dans l'annexe à la suite de l'exercice qui illustre la différence entre s(t).P(t) et s(t).P^2(t) pour montrer que la seconde forme permet de récupérer le signal S(t) par filtrage à moyenne mobile.

c) Dans cet exercice, il s'agit de récupérer le signal $S(t)$ à partir de $A(t)$ seulement, la valeur de f_p étant connue. Etant donné que nous connaissons f_p, nous pouvons multiplier $A(t)$ par $2P(t)$:

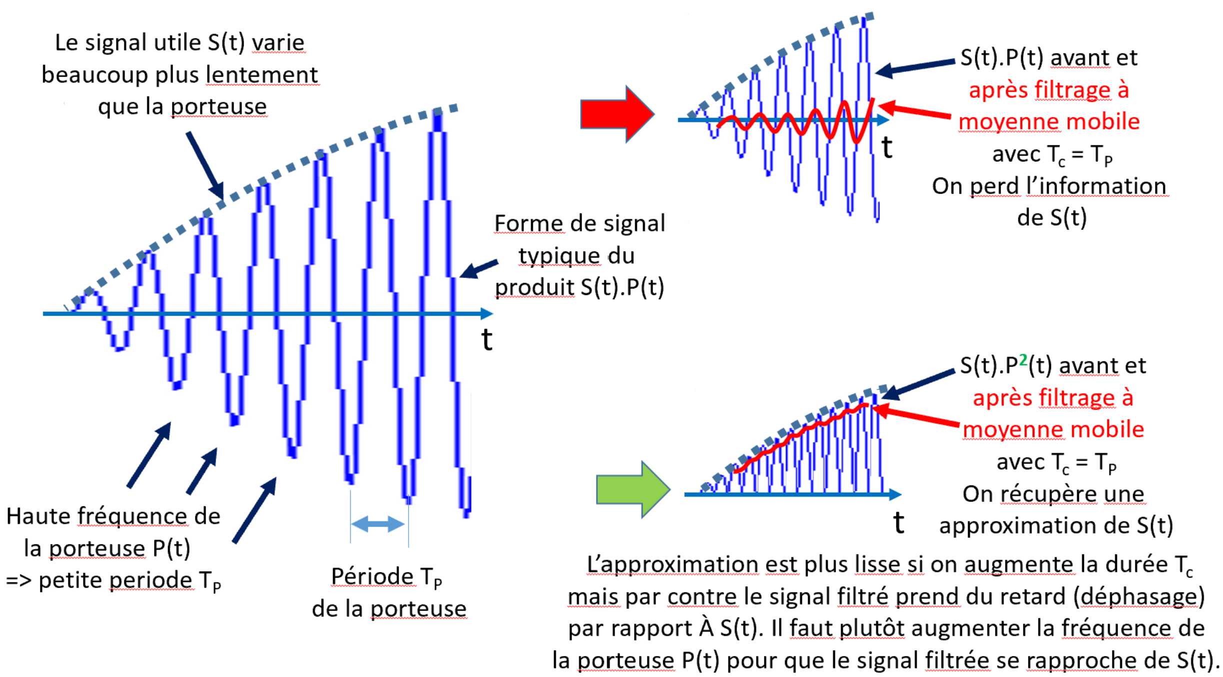
$$
\begin{aligned}
A(t)\,2P(t) &= 2S(t)\,P(t)\,P(t) = 2\,\sin(2\pi f_s t)\sin(2\pi f_p t)\sin(2\pi f_p t) \\
&= \sin(2\pi f_s t)\,(\cos(2\pi(f_p - f_p)t) - \cos(2\pi(f_p + f_p)t)) \\
&= \sin(2\pi f_s t)\,(1 - \cos(4\pi f_p t)) \\
&= \sin(2\pi f_s t) - \sin(2\pi f_s t)\cos(4\pi f_p t) \\
&= \sin(2\pi f_s t) + \frac{1}{2}\sin(2\pi(2f_p - f_s)t) - \frac{1}{2}\sin(2\pi(2f_p + f_s)t)
\end{aligned}
$$

Nous observons que nous avons maintenant la somme du signal $S(t) = \sin(2\pi f_s t)$ auquel nous sommes intéressés et de deux termes supplémentaires avec les fréquences respectives

$2f_p - f_s = 599$ kHz et $2f_p + f_s = 601$ kHz.

Nous pouvons supprimer ces deux termes en appliquant un filtre passe-bas idéal avec une fréquence de coupure plus basse que 599 kHz (p. ex. $f_c = f_p = 300$ kHz), et ainsi récupérer le signal $S(t)$.

Annexe : différence entre S(t).P(t) et S(t).P²(t) pour montrer que la seconde forme permet de récupérer le signal S(t) par filtrage à moyenne mobile



Le dessin du signal filtré (en rouge) est une approximation correcte sur le principe mais elle n'a pas été obtenue avec un outil mathématique ; son amplitude peut légèrement différer de la solution exacte. Dans la réalité la fréquence de la porteuse P(t) est beaucoup pus grande que dans cette illustration.