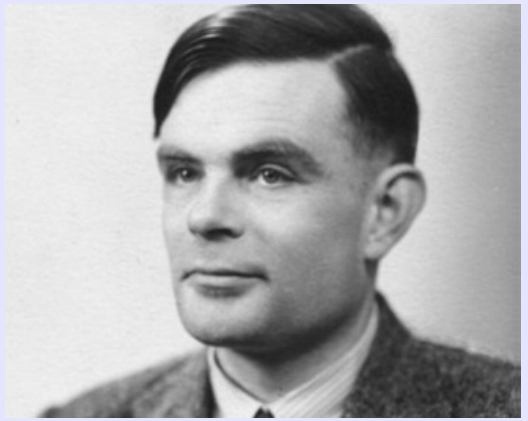
Ada Byron



Alan Turing

Grace Murray

Information, Calcul et Communication

Module 1 : Calcul

Leçon I.3 : Complexité des Algorithmes

J.-C. Chappelier, J. Sam (slides)

Objectifs de la leçon

Dans la leçon précédente, nous avons vu les composantes d'un algorithme, en particulier les instructions de contrôle, et comment celles-ci étaient mise en œuvre dans des algorithmes simples.

Nous cherchons maintenant à caractériser les algorithmes du point de vue de leur **coût calcul,** c'est-à-dire l'ordre de grandeur du *nombre d'opérations* requises pour obtenir le résultat.

☞ C'est dans ce sens que nous parlons de **l'ordre de complexité** d'un algorithme

Les objectifs de cette leçon sont de :

- Formaliser l'évaluation du coût calcul
- Identifier les principales classes d'ordre de complexité
- Pour cela, exploiter deux familles d'algorithmes: la **recherche** et le **tri**
- Aborder la stratégie de **conception top-down** sur l'algorithme de tri

Plan

- Evaluation du coût calcul sur deux variantes d'un algorithme de recherche linéaire
- Evaluation du coût calcul d'une recherche dans un ensemble ordonné: la dichotomie
- Ordre de complexité d'un algorithme (notation O(…))
- Ordre de complexité d'un problème: le tri
- Stratégie de conception top-down du tri par insertion

Recherche

Exemple : recherche d'un élément ***x*** dans un ensemble ***E***

AVANT TOUT : Spécification claire du problème :

- *E* peut-il être vide ?
  E varie-t-il pendant la recherche ?
  E est-il ordonné ?

Recherche

Exemple : recherche d'un élément *x* dans une liste *E*

Considérons par exemple les deux algorithmes suivants :

appartient1

entrée : *x* , *E non vide*
sortie : *x* ∈ *E ? (booléen)*

```
i ← 1
Répéter
    Si x = E[i]
        sortir : Vrai
    i ← i + 1
    t ← taille(E)
Tant que i ≤ t

sortir : Faux
```

appartient2

entrée : *x* , *E non vide*
sortie : *x* ∈ *E ? (booléen)*

```
t ← taille(E)
Pour i de 1 à t
    Si x = E[i]
        sortir : Vrai

sortir : Faux
```

Recherche

Exemple : recherche d'un élément *x* dans une liste *E*

Considérons par exemple les deux algorithmes suivants :

appartient1

entrée : *x* , *E non vide*
sortie : *x* ∈ *E* ?

```
i ← 1
Répéter
    Si x = E[i]
        sortir : Vrai
    i ← i + 1
    t ← taille(E)
Tant que i ≤ t

sortir : Faux
```

appartient2

entrée : *x* , *E non vide*
sortie : *x* ∈ *E* ?

```
t ← taille(E)
Pour i de 1 à t
    Si x = E[i]
        sortir : Vrai

sortir : Faux
```

autre algorithme (qui calcule la taille de *E*)

Complexité d'un algorithme

1) ces algorithmes sont ils **corrects** ?

- se terminent ils pour tous les cas ?
- donnent ils ce que l'on veut ?

2) lequel des deux est le **plus efficace** ?

- notion de **complexité** d'un algorithme

complexité (**temporelle** dans le **pire des cas**) : nombre d'instructions *élémentaires* nécessaires à un algorithme pour donner la réponse dans *le pire des cas*.

C'est une fonction de la *taille de l'entrée*

Complexité d'un algorithme : exemple

2e question : lequel est le **plus efficace** ?

Notons ***n*** la taille de ***E*** et comptons combien d'instructions élémentaires chaque algorithme nécessite dans le pire des cas ☞ $C1(n)$ et $C2(n)$

Pour l'algorithme **appartient1**(x, E) :

```
i ← 1
Répéter
    Si x = E [i]
        sortir : Vrai
    i ← i + 1
    t ← taille(E )
Tant que i ≤ t

sortir : Faux
```

1	affectation de la valeur **1** à la variable **i**	*1 instruction*
2	accès au i-ème élément de E et comparaison de cet élément avec *x*	*2 instructions*
3	incrémentation de i (de 1)	*1 instruction*
4	calcul de la taille de E	*T(n) instructions*
5	vérification de la condition ($i \leq t$) et retour en 2	*1 instruction*

Dans le *pire des cas*, les étapes 2 à 5 sont faites autant de fois qu'il y a d'éléments dans *E*, donc ***n*** fois.

☞ $C1(n) = 1 + n(\ T(n) + 4\ )$

Complexité d'un algorithme : exemple

Pour l'algorithme **appartient2**(*x*, *E*) :

```
t ← taille(E)
Pour i de 1 à t
    Si x = E[i]
        sortir : Vrai

sortir : Faux
```

1	calcul de la taille de E	T(n) instructions
2	affectation de la valeur 1 à *i*	1 instruction
3	vérification de la condition ($i \leq t$)	1 instruction
4	accès au i^e élément de E et comparaison de cet élément avec *x*	2 instructions
5	incrémentation de *i* (de 1) et retour en 3	*1 instruction*

Dans le *pire des cas*, les étapes 3 à 5 seront faites autant de fois qu'il y a d'éléments dans E, donc ***n*** fois.

☞ $C2(n) = T(n) + 1 + 4n$

Complexité d'un algorithme : exemple

Supposons (raisonnablement) que le calcul de la taille de E se fait en $T(\boldsymbol{n}) = a + b \cdot \boldsymbol{n}$ instructions (avec $b \geq 0$, mais éventuellement nul).

On aurait alors :

$$C1(\boldsymbol{n}) = 1 + (a + 4)\, n + b\, \boldsymbol{n}^2$$

$$C2(\boldsymbol{n}) = 1 + a + (4 + b)\, \boldsymbol{n}$$

Si $b > 0$ (i.e. non nul), alors l'algorithme 1 est donc **beaucoup plus lent** (pour de grands ensembles) !

Peut-on faire (nettement) mieux que l'algorithme 2 ?

☞ oui, si l'ensemble est **ordonné**

Plan

- Evaluation du coût calcul sur deux variantes d'un algorithme de recherche linéaire
- Evaluation du coût calcul d'une recherche dans un ensemble ordonné: la dichotomie
- Ordre de complexité d'un algorithme (notation O(…))
- Ordre de complexité d'un problème: le tri
- Stratégie de conception top-down du tri par insertion

Dichotomie (*algorithme récursif*)

appartient_D

entrée : x , E ***ordonné***
sortie : $x \in E$? *(booléen)*

la sortie est Vrai ou Faux (booléen)

Si *E est vide*
    Sortir : *Faux*
Si *E est réduit à 1 seul élément e*
    Si $x = e$ *Alors* ***Sortir*** *Vrai*
    Sinon ***Sortir*** *Faux*

découper E en deux parties E_1 *et* E_2 — *moitié-moitié*

Si $x \leq \max(E_1)$
    Sortir : appartient_D(x , E_1)
Sinon
    Sortir : appartient_D(x , E_2)

☞ Cet algorithme s'appelle la **recherche par dichotomie**

Exemple de recherche par dichotomie dans un ensemble ordonné

E =
abaque
abasourdi
babouin
baobab
blanc
bleu
zoulou

x = bleu

```
Si E est vide
    sortir : Faux
Si E est réduit à 1 seul élément e
    Si x = e   Alors Sortir Vrai
    Sinon          Sortir Faux

découper E en deux parties  E1 et E2

Si x ≤ max(E1)
    sortir : appartient_D(x , E1)
Sinon
    sortir : appartient_D(x , E2)
```

appartient_D(x, E) = ??

E =
abaque
abasourdi
babouin
baobab
blanc
bleu
zoulou

x = bleu

E n'est pas vide ni réduit à un élément

```
Si E est vide
    sortir : Faux
Si E est réduit à 1 seul élément e
    Si x = e   Alors Sortir Vrai
    Sinon          Sortir Faux

découper E en deux parties  E1 et E2

Si x ≤ max(E1)
    sortir : appartient_D(x , E1)
Sinon
    sortir : appartient_D(x , E2)
```

appartient_D(x, E) = ??

E_1 = abaque
abasourdi
babouin
baobab

x = bleu

E_2 = blanc
bleu
zoulou

E n'est pas vide ni réduit à un élément

donc on découpe E en (par exemple) E_1 et E_2 comme ci-dessus

```
Si E est vide
    sortir : Faux
Si E est réduit à 1 seul élément e
    Si x = e   Alors Sortir Vrai
    Sinon          Sortir Faux

découper E en deux parties  E1 et E2

Si x ≤ max(E1)
    sortir : appartient_D(x , E1)
Sinon
    sortir : appartient_D(x , E2)
```

appartient_D(x, E) = ??

E_1 = abaque
abasourdi
babouin
baobab

x = bleu

E_2 = blanc
bleu
zoulou

est-ce que $x \leq \max(E_1)$, c.-à-d. est-ce que «bleu» vient avant «baobab» ?

☞ non

```
Si E est vide
    sortir : Faux
Si E est réduit à 1 seul élément e
    Si x = e   Alors Sortir Vrai
    Sinon          Sortir Faux

découper E en deux parties  E1 et E2

Si x ≤ max(E1)
    sortir : appartient_D(x , E1)
Sinon
    sortir : appartient_D(x , E2)
```

appartient_D(x, E) = appartient_D(x, E_2)

E_1 = abaque
abasourdi
babouin
baobab

x = bleu

E_2 = blanc
bleu
zoulou

est-ce que $x \leq \max(E_1)$, c.-à-d. est-ce que «bleu» vient avant «baobab» ?

☞ non

donc la solution est la même que appartient_D(x, E_2)

```
Si E est vide
    sortir : Faux
Si E est réduit à 1 seul élément e
    Si x = e   Alors Sortir Vrai
    Sinon          Sortir Faux

découper E en deux parties  E1 et E2

Si x ≤ max(E1)
    sortir : appartient_D(x , E1)
Sinon
    sortir : appartient_D(x , E2)
```

$$\text{appartient\_D}(x, E) = \text{appartient\_D}(x, E_2)$$

E_1 = abaque
abasourdi
babouin
baobab

x = bleu

$E_{2.1}$ = blanc
bleu

$E_{2.2}$ = zoulou

E_2 n'est pas vide ni réduit à un élément

donc on découpe E_2 en (par exemple) $E_{2.1}$= blanc bleu et $E_{2.2}$=zoulou

```
Si E est vide
    sortir : Faux
Si E est réduit à 1 seul élément e
    Si x = e   Alors Sortir Vrai
    Sinon          Sortir Faux

découper E en deux parties  E1 et E2

Si x ≤ max(E1)
    sortir : appartient_D(x , E1)
Sinon
    sortir : appartient_D(x , E2)
```

$$\text{appartient\_D}(x, E) = \text{appartient\_D}(x, E_{2.1})$$

E_1 = abaque
abasourdi
babouin
baobab

x = bleu

$E_{2.1}$ = blanc
bleu

$E_{2.2}$ = zoulou

est-ce que $x \leq \max(E_{2.1})$?

☞ oui

donc la solution est la même que appartient_D$(x, E_{2.1})$

Si *E est vide*
    sortir : *Faux*
Si *E est réduit à 1 seul élément e*
    Si *x = e Alors* ***Sortir*** *Vrai*
    Sinon ***Sortir*** *Faux*

découper E en deux parties E_1 *et* E_2

Si $x \leq \max(E_1)$
    sortir : appartient_D(x, E_1)
Sinon
    sortir : appartient_D(x, E_2)

$$\text{appartient\_D}(x, E) = \text{appartient\_D}(x, E_{2.1})$$

E_1 = abaque
abasourdi
babouin
baobab

x = bleu

$E_{2.1}$ = blanc
bleu

$E_{2.2}$ = zoulou

$E_{2.1}$ n'est pas vide ni réduit à un élément,

```
Si E est vide
    sortir : Faux
Si E est réduit à 1 seul élément e
    Si x = e   Alors Sortir Vrai
    Sinon          Sortir Faux

découper E en deux parties  E1 et E2

Si x ≤ max(E1)
    sortir : appartient_D(x , E1)
Sinon
    sortir : appartient_D(x , E2)
```

$$\text{appartient\_D}(x, E) = \text{appartient\_D}(x, E_{2.1})$$

E_1 = abaque
abasourdi
babouin
baobab

$E_{2.1.1}$ = blanc

$E_{2.1.2}$ = bleu

$E_{2.2}$ = zoulou

x = bleu

$E_{2.1}$ n'est pas vide ni réduit à un élément,
donc on découpe $E_{2.1}$ en $E_{2.1.1}$= blanc et $E_{2.1.2}$=bleu

Si *E est vide*
    sortir : *Faux*
Si *E est réduit à 1 seul élément e*
    Si *x = e Alors* ***Sortir*** *Vrai*
    Sinon ***Sortir*** *Faux*

découper E en deux parties E_1 *et* E_2

Si $x \leq \max(E_1)$
    sortir : appartient_D(x, E_1)
Sinon
    sortir : appartient_D(x, E_2)

$$\text{appartient\_D}(x, E) = \text{appartient\_D}(x, E_{2.1})$$

E_1 = abaque
abasourdi
babouin
baobab

$E_{2.1.1}$ = blanc

$E_{2.1.2}$ = bleu

$E_{2.2}$ = zoulou

x = bleu

est-ce que $x \leq \max(E_{2.1.1})$, c.-à-d. est-ce que «bleu» vient avant «blanc» ?

Si *E est vide*
  sortir : *Faux*
Si *E est réduit à 1 seul élément e*
  Si *x = e Alors* ***Sortir*** *Vrai*
  Sinon ***Sortir*** *Faux*

découper E en deux parties E_1 *et* E_2

Si $x \leq \max(E_1)$
  sortir : appartient_D(x, E_1)
Sinon
  sortir : appartient_D(x, E_2)

$$\text{appartient\_D}(x, E) = \text{appartient\_D}(x, E_{2.1.2})$$

E_1 = abaque
abasourdi
babouin
baobab

$E_{2.1.1}$ = blanc

$E_{2.1.2}$ = bleu

$E_{2.2}$ = zoulou

x = bleu

est-ce que $x \leq \max(E_{2.1.1})$, c.-à-d. est-ce que «bleu» vient avant «blanc» ?

☞ non

donc la solution est la même que appartient_D$(x, E_{2.1.2})$

Si *E est vide*
  sortir : *Faux*
Si *E est réduit à 1 seul élément e*
  Si *x = e Alors* ***Sortir*** *Vrai*
  Sinon ***Sortir*** *Faux*

découper E en deux parties E_1 *et* E_2

Si $x \leq \max(E_1)$
  sortir : appartient_D(x, E_1)
Sinon
  sortir : appartient_D(x, E_2)

$\text{appartient\_D}(x, E) = \text{appartient\_D}(x, E_{2.1.2})$

$E_1 =$ abaque
abasourdi
babouin
baobab

$E_{2.1.1} =$ blanc

$E_{2.1.2} =$ bleu

$E_{2.2} =$ zoulou

$x =$ bleu

$E_{2.1.2}$ est réduit à un élément

Est-ce x ? ☞ oui

```
Si E est vide
    sortir : Faux
Si E est réduit à 1 seul élément e
    Si x = e   Alors Sortir Vrai
    Sinon          Sortir Faux

découper E en deux parties  E1 et E2

Si x ≤ max(E1)
    sortir : appartient_D(x , E1)
Sinon
    sortir : appartient_D(x , E2)
```

appartient_D(x, E) = **oui** !

E_1 = abaque
abasourdi
babouin
baobab

$E_{2.1.1}$ = blanc

$E_{2.1.2}$ = bleu

$E_{2.2}$ = zoulou

x = bleu

$E_{2.1.2}$ est réduit à un élément

Est-ce x ? ☞ oui

donc la solution est « oui »

Complexité ?

Quel est le nombre d'opérations nécessaires pour une recherche par dichotomie dans le pire des cas ?

Si l'élément recherché est au « milieu » du « milieu » du ... « milieu » du « milieu » de l'ensemble, il faudra répéter la boucle de découpage en ***deux*** autant de fois qu'on découpe l'ensemble.

On va donc boucler autant de fois qu'on peut diviser *n* par 2 et obtenir un résultat avec ***une partie entière non nulle***.

Combien de fois qu'on peut diviser *n* par 2 ?

☞ $\log_2 n$

Coût calcul très avantageux par rapport à la recherche linéraire car **$\log_2 (n) << n$**

Rappels :

$2^y = n \Rightarrow y = \log_2(n)$

$$\log_2(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$$

Plan

- Evaluation du coût calcul sur deux variantes d'un algorithme de recherche linéaire
- Evaluation du coût calcul d'une recherche dans un ensemble ordonné: la dichotomie
- Ordre de complexité d'un algorithme (notation O(…))
- Ordre de complexité d'un problème: le tri
- Stratégie de conception top-down du tri par insertion

Complexité : notation *O*(...)

Pour comparer des algorithmes, ce qui nous intéresse c'est de savoir comment leur complexité évolue en fonction de la taille des données en entrée.

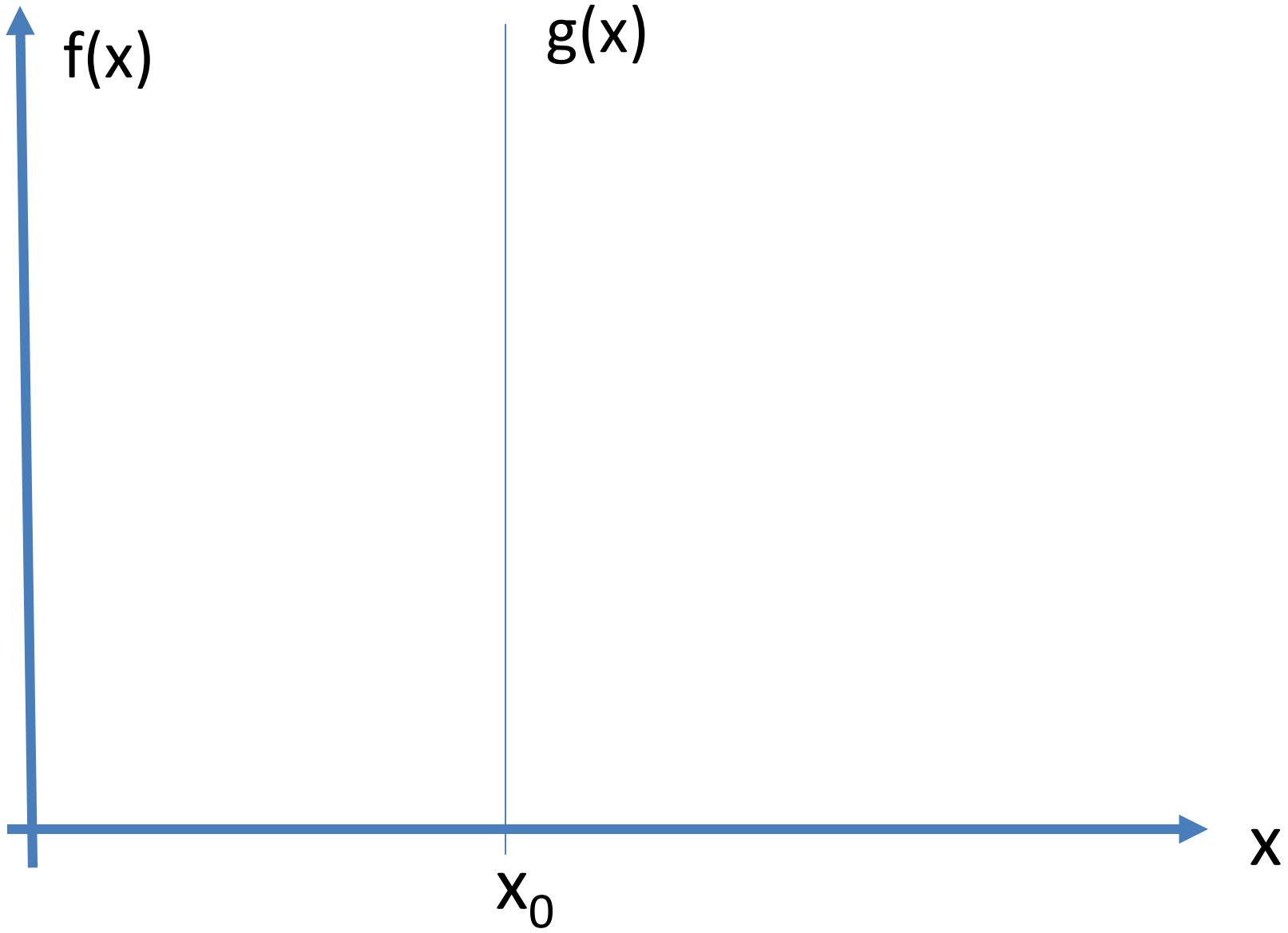
Pour cela, on effectue des comparaisons sur les **ordres de grandeur asymptotiques** (quand la taille des données en entrée tend vers l'infini) Ces ordres de grandeur sont généralement notés en utilisant la notation de Landau *O*(...)

Pour deux fonctions f et g de R dans R, on écrit :

$$f \in O(g)$$

si et seulement si

$$\exists c > 0 \; \exists x_0 \; \forall x > x_0 \; |f(x)| \leq c \cdot |g(x)|$$


f(x)
g(x)
x
x_0

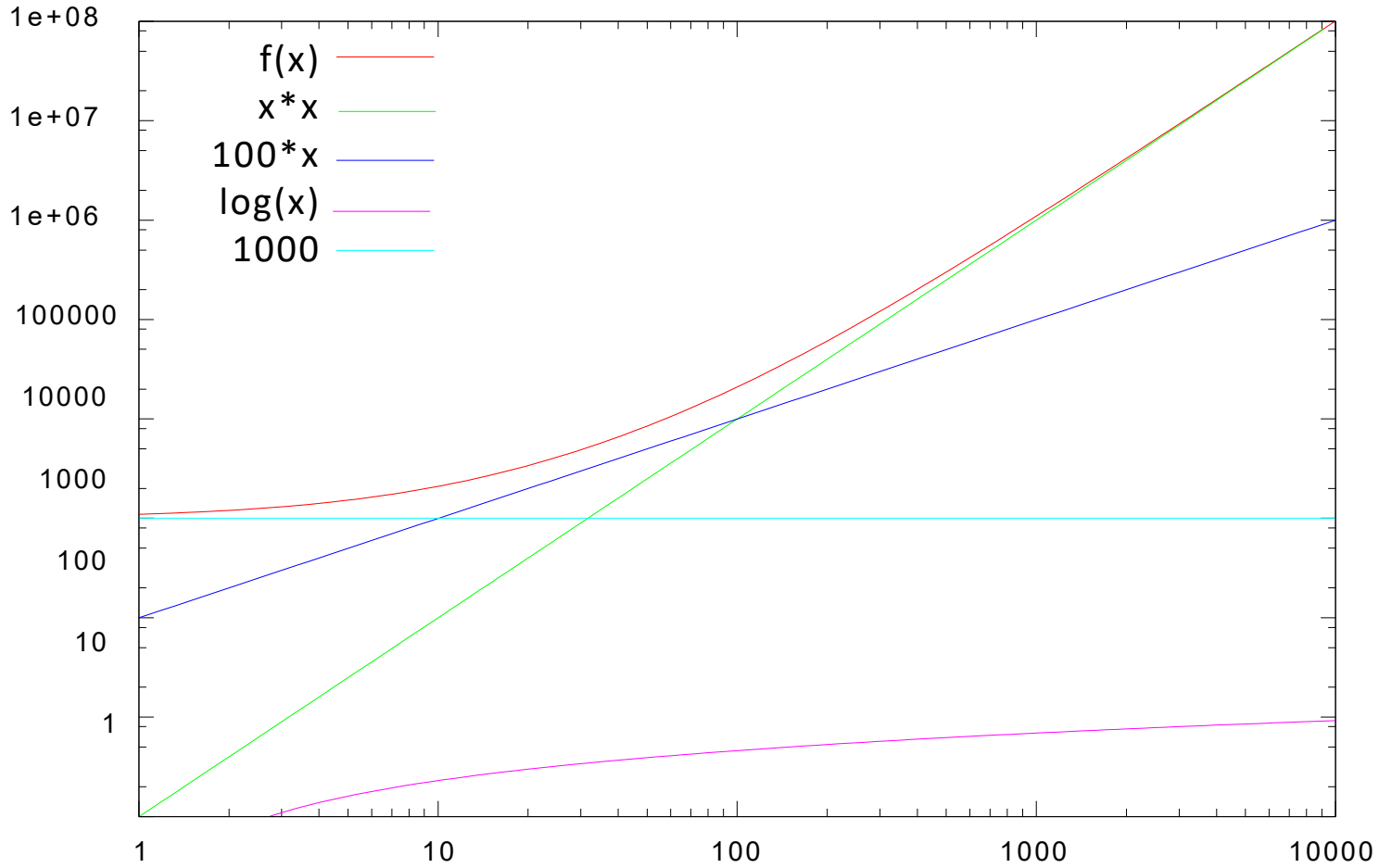
Notation « grand O » : exemple

$$f(n) = n^2 + 100n + \log n + 1000$$

n	$f(n)$	n^2		$100n$		$\log n$		1000	
		valeur	**%**	**valeur**	**%**	**valeur**	**%**	**valeur**	**%**
1	**1'101**	1	0.1	100	9.1	0	0	1000	90.82
10	**2'101**	100	4.8	1'000	47.6	1	0.0	1000	47.6
100	**21'002**	10'000	47.6	10'000	47.6	2	0.0	1000	4.8
10^3	**1'101'003**	10^6	90.8	10^5	9.1	3	0.0	1000	0.1
10^4	**101'001'004**	10^8	99.0	10^6	1.0	4	0.0	1000	0.0
...									

Notation « grand O » : exemple (suite)

$$f(n) = n^2 + 100n + \log n + 1000$$



Comparaison d'algorithme

En pratique pour mesurer la complexité d'un algorithme, on utilise évidemment **la plus petite des fonctions majorantes possibles g()**

Exemples :

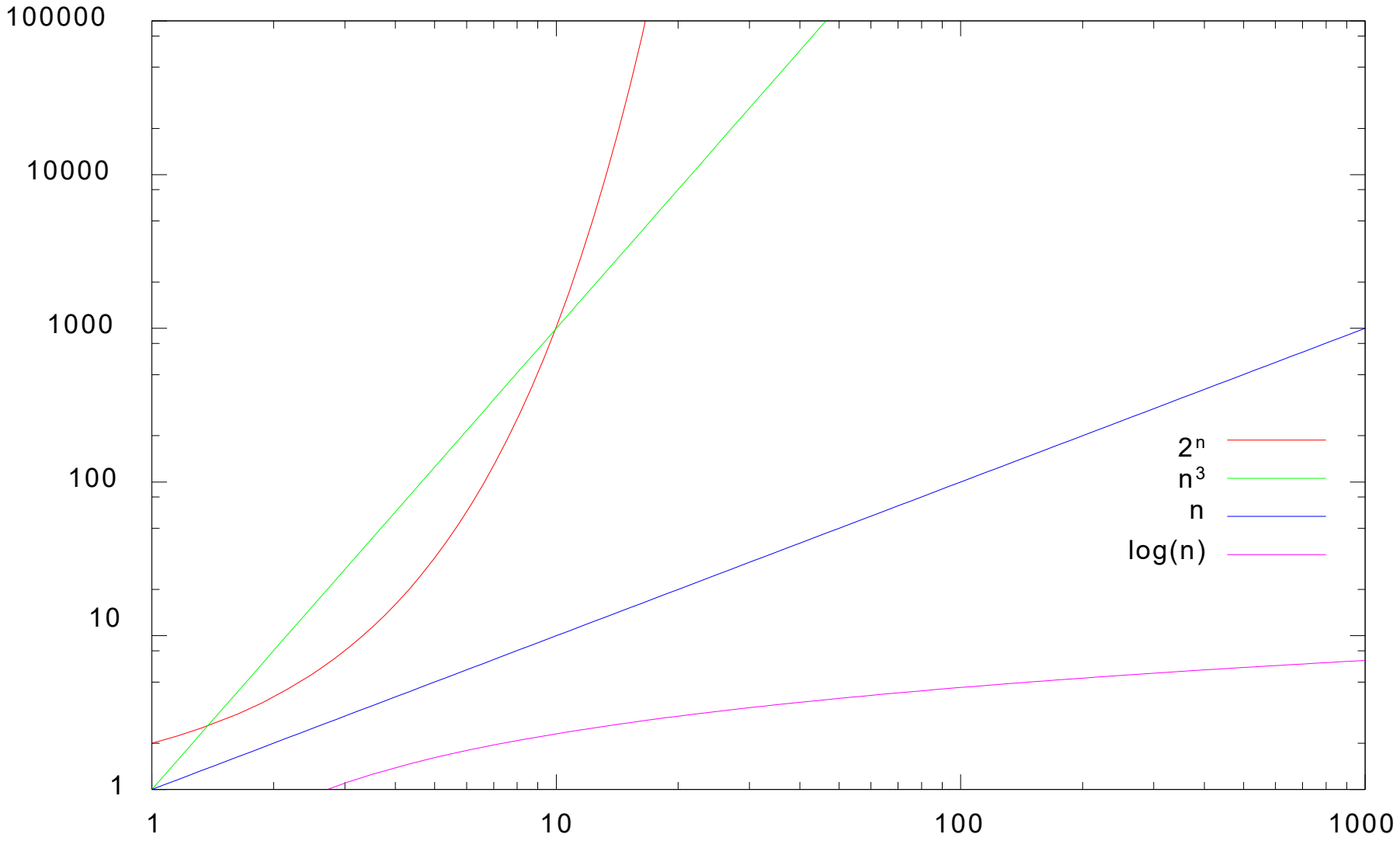
n est $O(n^2)$ mais n est aussi $O(n)$

12 est $O(n^2)$, $O(n)$, mais surtout $O(1)$

Différentes classes de complexité permettent alors de caractériser les algorithmes (n représentant la taille d'entrée) :

- complexité **constante $O(1)$** : cas idéal ! aucune influence sur l'algorithme
- complexité **logarithmique $O(\log n)$**
- complexité **linéaire $O(n)$**
- complexité **quasi-linéaire $O(n \log(n))$**
- complexité **polynomiale $O(n^2)$, ... $O(n^k)$**
- complexité **exponentielle $O(2^n)$**, le pire des cas

Comparaison



Comparaison

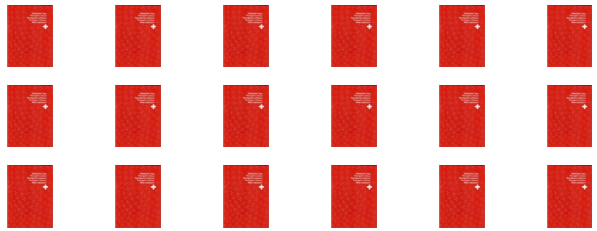
Si la police devrait contrôler les papiers de tous les Lausannois(es),

il y aurait une file continue de 175 km

à peu près une file linéaire continue jusqu'à Zürich !

Si elle ne doit en contrôler que le **log** : que 18 passeports ! !

(log en base 2)



SpeakUp1 : what is the order of complexity of an algorithm with the following number of instructions as a function of n:

$$f(n) = 6.n + n^2 + 5.log(n) + n^{40}$$

A. Lineaire
B. Logarithmique
C. Exponentielle
D. Polynomiale

Algorithmes de recherche dans une liste

Pour résumer sur les algorithmes de recherche:

- **si la liste n'est pas ordonnée** : recherche exhaustive terme à terme, complexité linéaire ($O(n)$, où n est la taille de la liste)
- **si la liste est *ordonnée*** : recherche par dichotomie, complexité logarithmique ($O(\log n)$)

☞ importance de la *modélisation des données*

- Ici si la liste est triée : solution moins complexe en temps
- ***mais quelle est la complexité du tri*** ?...
- Notez cependant que le tri n'est fait qu'une seule fois avant toutes les recherches !

Plan

- Evaluation du coût calcul sur deux variantes d'un algorithme de recherche linéaire
- Evaluation du coût calcul d'une recherche dans un ensemble ordonné: la dichotomie
- Ordre de complexité d'un algorithme (notation O(…))
- Ordre de complexité d'un problème: le tri
- Stratégie de conception top-down du tri par insertion

Les tris

Le problème du tri est un problème intéressant en tant que tel et un bon exemple de problème pour lequel il existe de nombreux algorithmes.

Spécification du problème :

On considère une structure de données contenant des éléments que l'on peut **comparer** (entre eux : *relation d'ordre* totale sur l'ensemble des éléments)

On dira qu'un ensemble de données est **trié** si ses éléments sont disposés par **ordre croissant** lorsque l'on itère sur la structure de donnée.

Les tris

Par exemple : on cherche à trier un tableau d'entiers.

Remarques :

- un tri ne supprime pas les doublons
- quelque soit l'algorithme de tri, un ensemble de données vide ou réduit à un seul élément est déjà trié !...

On parle de **tri interne** (ou « sur/en place », par opposition à tri externe) lorsque l'on peut effectuer le tri en mémoire centrale, sans utiliser de support extérieur (fichier).

Algorithmes de tri

Il existe un grand nombre d'algorithmes de tri :

- récursif
- par insertion
- par sélection
- tri shaker
- tri de Shell
- tri tournois
- tri fusion
- tri par tas
- quick sort (« tri rapide »)
- …

Comparaison des méthodes de tri

Soit n le nombre de données à trier.

	Complexité	
	moyenne	**pire cas**
par sélection	$O(n^2)$	$O(n^2)$
par insertion	$O(n^2)$	$O(n^2)$
de Shell	–	$O(n^{1.5})$
quick sort	$O(n \log n)$	$O(n^2)$
par tas	$O(n \log n)$	$O(n \log n)$

Mais en **pratique** : à partir de quelle taille les méthodes simples deviennent-elles vraiment plus mauvaises que les méthodes sophistiquées (quick sort ou tri par tas) ?

Conclusions sur les tris : comparaison (2)

En pratique ?

Cela dépend de nombreux facteurs, mais en général on peut dire que pour moins d'une **centaine** d'éléments les tris sophistiqués n'en valent pas la peine.

Par ailleurs, expérimentalement le quick sort est 2 à 3 fois plus rapide que le tri par tas

Dans le cas de listes presque triées, les tris par insertion sont efficaces

Le tri bulles, très simple à écrire, est le moins bon des tris : à proscrire (sauf à des fins pédagogiques)

http://www.sorting-algorithms.com/

Un premier exemple : le tri par insertion

Le principe du **tri par insertion** est extrêmement simple :

Un élément mal placé dans le tableau va systématiquement être inséré à sa « bonne place » dans le tableau.

tri insertion
entrée : *un tableau (d'objets que l'on peut comparer)* Sortie : *le tableau trié*
***Tant que** il y a un élément mal placé* *on cherche sa bonne place* *on déplace l'élément à sa bonne place*

« *élément mal placé* » = tout élément du tableau
strictement plus petit que son prédécesseur.

Exemple de déroulement du tri par insertion

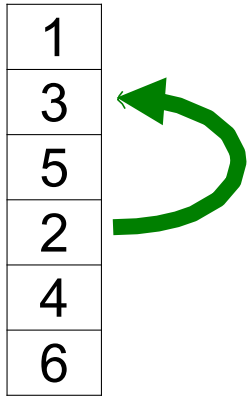
1
3
5
2
4
6

Exemple de déroulement du tri par insertion

1
3
5
2
4
6

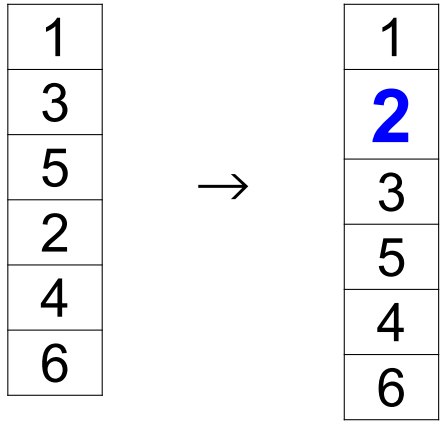
Tant que il y a un élément mal placé
on cherche sa bonne place
on déplace l'élément à sa bonne place

Exemple de déroulement du tri par insertion



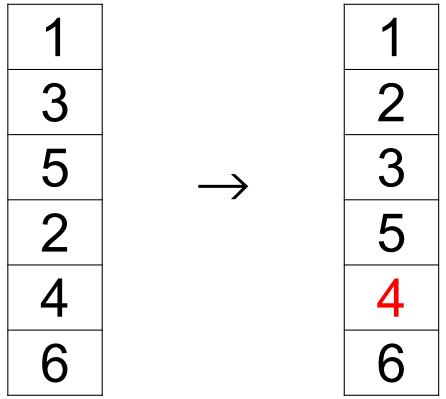
Tant que il y a un élément mal placé
on cherche sa bonne place
on déplace l'élément à sa bonne place

Exemple de déroulement du tri par insertion



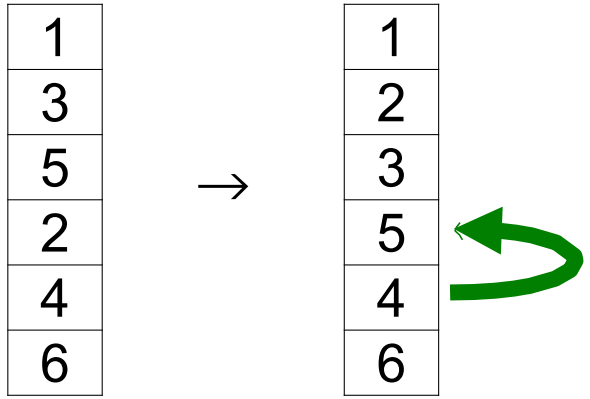
Tant que il y a un élément mal placé
on cherche sa bonne place
on déplace l'élément à sa bonne place

Exemple de déroulement du tri par insertion



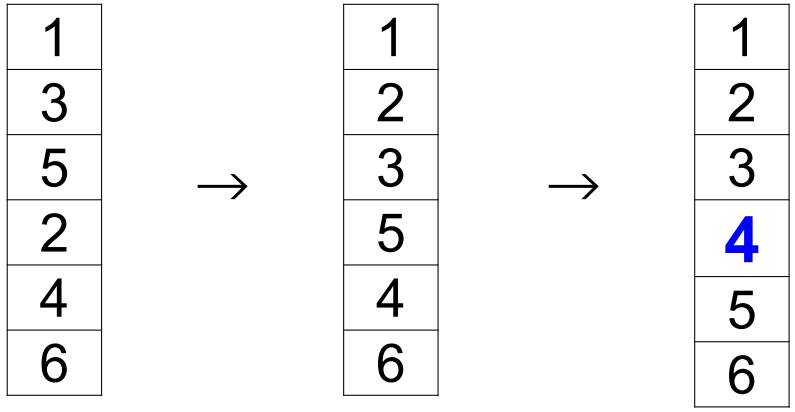
Tant que il y a un élément mal placé
on cherche sa bonne place
on déplace l'élément à sa bonne place

Exemple de déroulement du tri par insertion



Tant que il y a un élément mal placé
on cherche sa bonne place
on déplace l'élément à sa bonne place

Exemple de déroulement du tri par insertion



Tant que il y a un élément mal placé
on cherche sa bonne place
on déplace l'élément à sa bonne place

Plan

- Evaluation du coût calcul sur deux variantes d'un algorithme de recherche linéaire
- Evaluation du coût calcul d'une recherche dans un ensemble ordonné: la dichotomie
- Ordre de complexité d'un algorithme (notation O(…))
- Ordre de complexité d'un problème: le tri
- Stratégie de conception top-down du tri par insertion

Conception d'algorithmes

Comment **concevoir** un algorithme permettant de résoudre un problème donné ?

Il n'y a malheureusement pas de méthode miracle ni de recette toute faite pour construire des solutions algorithmiques à un problème donné.

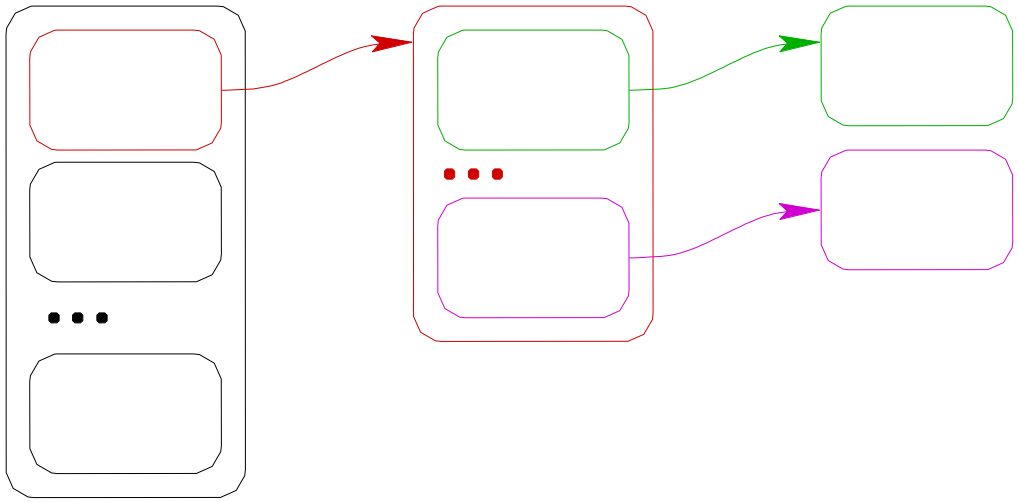
Il existe cependant plusieurs **méthodes de résolution**, c'est-à-dire des *schémas d'élaboration de solutions*.

Plusieurs de ces méthodes suivent ce que l'on appelle **une approche descendante** (« *top-down* », procède par *analyse*), par opposition à ascendante (« *bottom-up* », procède par *synthèse*).

Approche descendante

Résoudre un problème par une **approche descendante** consiste à décomposer le problème général en sous-problèmes plus spécifiques, lesquels seront chacun décomposés en problèmes encore plus spécifiques, etc. (raffinements successifs)

Une telle analyse du problème se fait à l'aide de blocs imbriqués correspondant chacun à des résolutions de plus en plus spécifiques, décrites par des algorithmes de plus en plus spécialisés.



Exemple

Algorithme de tri par insertion

On découpe le problème en sous-problèmes :

tri insertion
entrée : *un tableau (d'objets que l'on peut comparer)* sortie : *le tableau trié*
***Tant que** il y a un élément* mal placé *on cherche sa* bonne place *on* déplace *l'élément à sa bonne place*

exemple:

1
3
5
2
4
6

Chaque *sous-problème* étant ensuite spécifié plus clairement puis résolu.

Tri par insertion : résolution détaillée

Le sous-problème *rechercher un élément mal placé*

entrée : un tableau tab (de taille N)
sortie : position du 1er élément mal rangé dans l'ordre croissant
car *strictement plus petit que son prédécesseur*

On parcourt le tableau à partir du 2ième élément
car c'est le premier à avoir un prédécesseur :

```
Pour pos de 2 à N
    Si tab[pos] < tab[pos-1]
        sortir: pos

sortir: 1
```

Exemple:

tab	pos :
1	
3	2
5	3
2	4
4	5
6	6

s'il n'y a pas d'élément mal placé on retourne la position **1** car, dans cette boucle **Pour**, l'élément de position **1** ne peut pas être mal placé.

Tri par insertion : résolution détaillée (2)

Le sous-problème *trouver la bonne place*

entrée : un tableau `tab` et l'entier **pos**, position d'un élément mal placé
sortie : la bonne position **pos_ok** de l'élément mal placé.

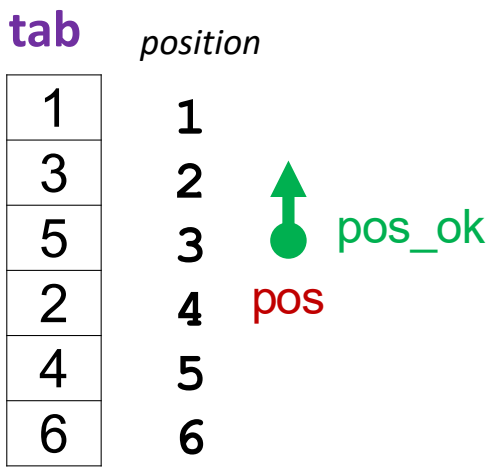
posons **Valeur_mal_placee** ← `tab[` **pos**]

On recherche sa « bonne position » **pos_ok**
en reculant dans le tableau de **(pos -1)** jusqu'au second élément

pos_ok ← pos -1

Tant que (pos_ok ≥ 2 et Valeur_mal_placee < tab[pos_ok -1])
pos_ok ← pos_ok -1

Exemple:



Remarque:
la condition pour continuer la boucle comporte deux termes qui doivent tous les deux être VRAI.
On quitte la boucle dès que l'un des deux est FAUX

Tri par insertion : résolution détaillée (3)

Le sous-problème *déplacer un élément*

entrée : un tableau tab, une position de départ pos et une position finale pos_ok

On doit déplacer l'élément de la position pos dans tab à la position pos_ok.

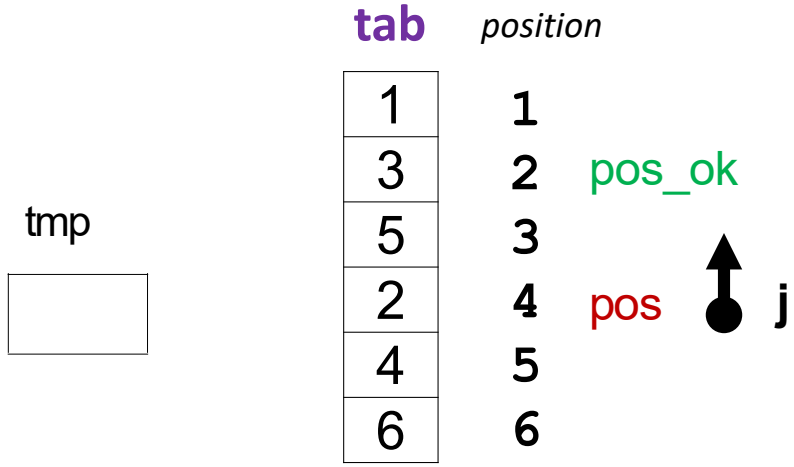
On peut effectuer cette opération par **décalages successifs** à l'aide d'une boucle **Pour:**

tmp ← **tab**[**pos**]

Pour j de **pos** à (**pos_ok** +1)
tab[j] ← tab[j-1]

tab[**pos_ok**] ← tmp

exemple:



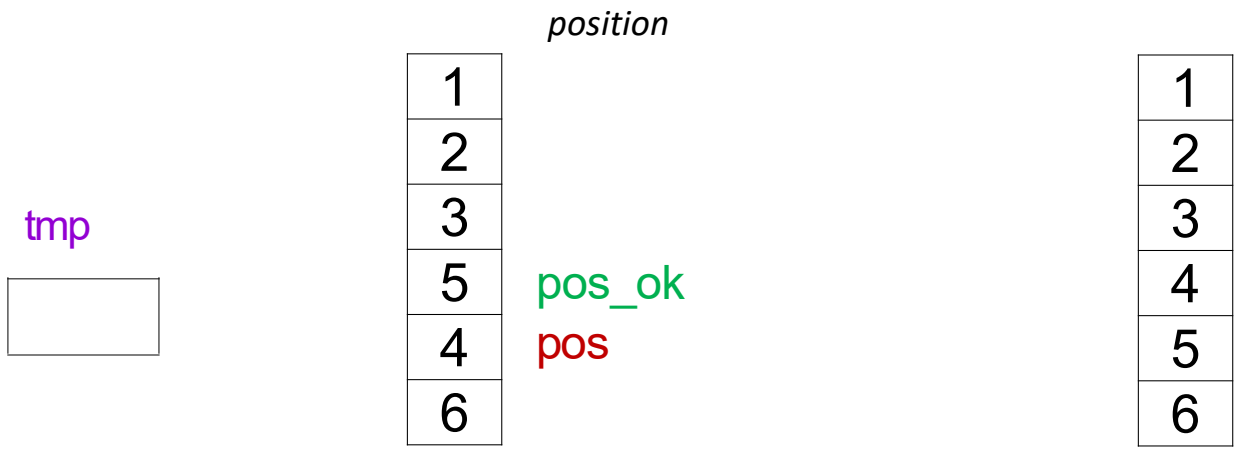
Il faut aussi décaler du coté des indices croissants les valeurs qui se trouvent déjà dans le tableau entre **pos_ok** et **pos**

On utilise une variable tmp pour ne pas perdre la valeur **tab**[**pos**].

Tri par insertion : résolution détaillée (4)

l'algorithme se poursuit tant qu'un élément mal placé est trouvé dans le tableau

exemple précédent (traitement de l'élément suivant mal placé):

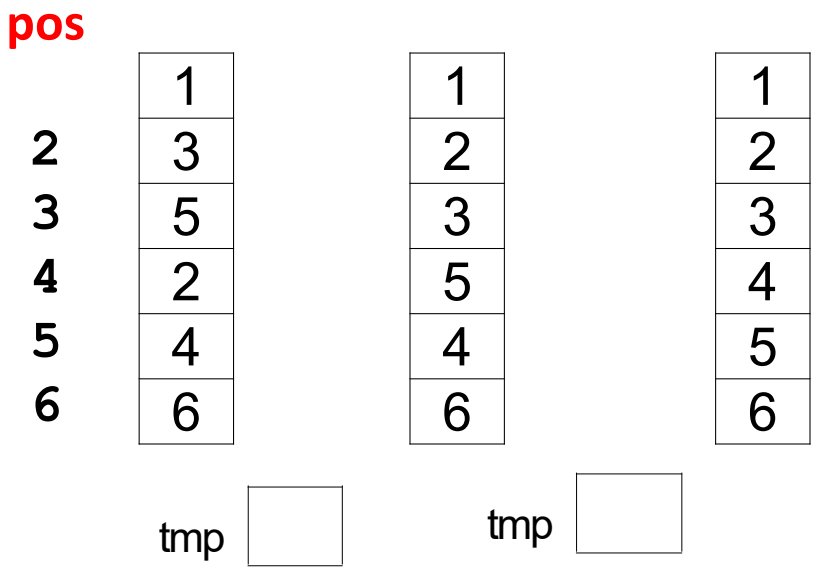


Améliorations

1. Pour *rechercher le prochain élément mal placé* , ce n'est pas la peine de recommencer du début (position 2) à chaque fois. On peut continuer juste après *la dernière position mal placée*.
2. On pourrait *trouver la bonne place* et *déplacer l'élément* à cette place *en même temps* (i.e. en *une seule* itération)

```
Pour pos de 2 à N (= taille du tableau)
    tmp ← tab[pos]
    j ← pos

    Tant que j ≥ 2 et tmp<tab[ j-1 ]
        tab[ j ] ← tab[ j-1 ]
        j ← j-1

    tab[ j ] ← tmp
```

Exemple précédent à faire soi-même:

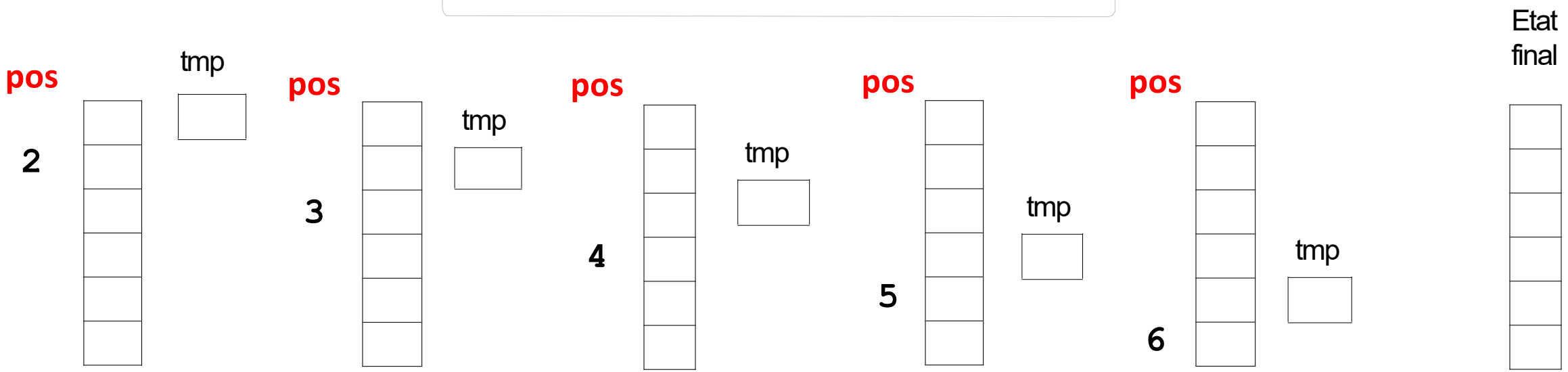


exemple sur le pire des cas: liste à l'envers

Pour pos de 2 à N (= taille du tableau)
tmp ←tab[pos]
j ←pos

Tant que j ≥ 2 **et** tmp < tab[j-1]
tab[j] ←tab[j-1]
j ←j-1

tab[j] ←tmp



exemple sur le pire des cas: liste à l'envers (résolu)

Etat initial

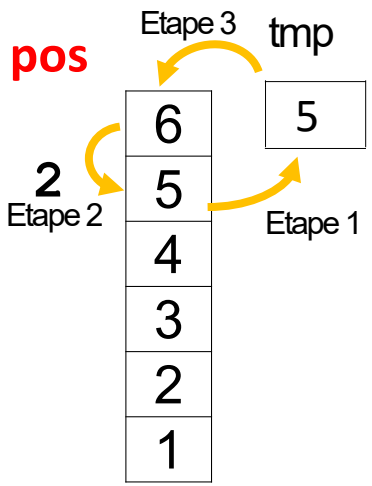
6
5
4
3
2
1

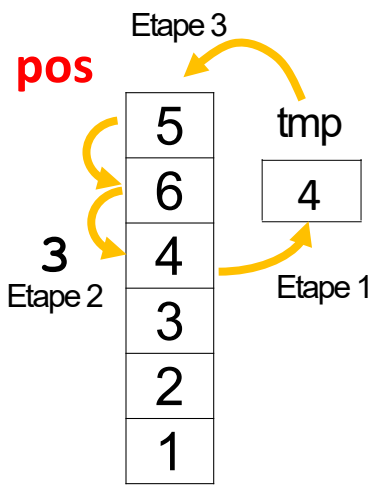
Etape 1

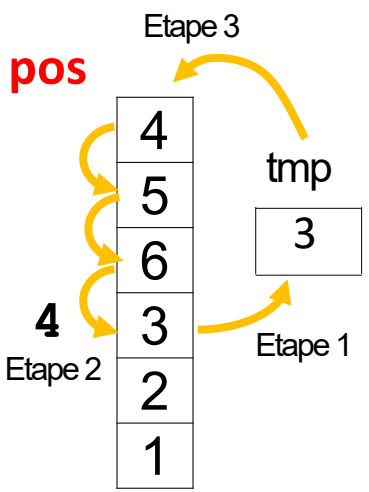
Etape 2

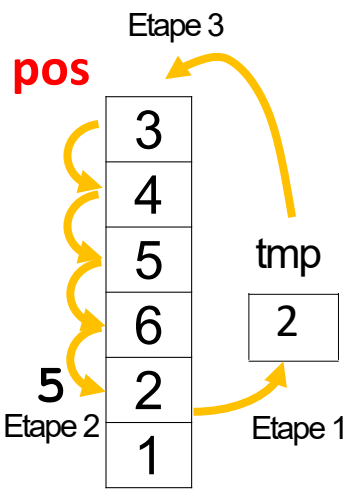
Etape 3

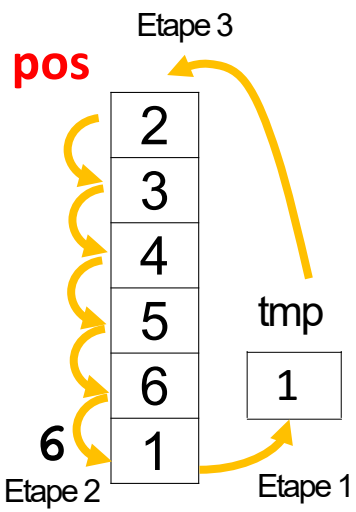
```
Pour pos de 2 à N (= taille du tableau)
    tmp ←tab[pos]
    j ←pos

    Tant que j ≥ 2 et tmp < tab[ j-1 ]
        tab[ j ] ←tab[ j-1 ]
        j ←j-1

    tab[ j ] ←tmp
```











Etat final

1
2
3
4
5
6

exemple sur le pire des cas: liste à l'envers (2)

N-1 passages

Étape 1

Étape 2

Étape 3

```
Pour pos de 2 à N (= taille du tableau)
    tmp ←tab[pos]
    j ←pos

    Tant que j ≥ 2 et tmp < tab[ j-1 ]
        tab[ j ] ←tab[ j-1 ]
        j ←j-1

    tab[ j ] ←tmp
```

Coût Calcul en fonction de N =
(N-1)*(coût constant des étapes **1** et **3**)
+ (total des étapes **2**)

= (coût constant d'un passage dans **Tant que**)
*(somme des nombres de passages)

Coût Calcul en fonction de N =
(N-1)*constante1
+ (N*(N-1)/2)*constante2

Terme dominant en N^2

Cet algorithme est en $O(N^2)$

La somme contient
(N-1) termes

On peut construire (N-1)/2
paires dont la valeur est N

= 1 + 2 + 3 . . . . + (N-2) + (N-1)

2 + (N-2) = N

1 + (N-1) = N

somme des nombres de passages = N * (N-1)/2

Ce que j'ai appris aujourd'hui

Dans cette leçon, vous avez

- appris à comparer l'efficacité de deux algorithmes : **complexité**
- vu deux familles de problèmes typiques en Informatique (recherche, tris)
- vu combien *algorithme* et représentations des *données* sont liés :
  - recherche linéaire dans une liste non ordonnée
  - versus recherche dichotomique dans une liste ordonnée

☞ ***Vous pouvez maintenant :***

- décrire certains problèmes de base de l'Informatique (recherche, tris)
- construire des algorithmes simples pour des problèmes simples typiques
- calculer la complexité d'algorithmes simples

La suite

La prochaine leçon présentera :

- la stratégie *Divide & Conquer*
- Autres illustrations avec l'approche récursive : force et faiblesse
- La programmation dynamique
  - Exemple: Algorithme(s) de plus court chemin