# M2.L1 et M2.L2 : Série d'exercices sur l'échantillonnage de signaux

**Rappel de trigonométrie**

Soient *a, b ,u, v* des nombres réels. Alors on a les relations suivantes:

| | |
|---|---|
| 2 sin(u) sin(v) = cos(u - v) – cos(u + v) | cos($a$ + $b$) = cos($a$)cos($b$) − sin($a$)sin($b$) |
| 2 cos(u) sin(v) = sin(u + v) – sin (u - v) | cos($a$ − $b$) = cos($a$)cos($b$) + sin($a$)sin($b$) |
| cos(b) – cos(a) = 2 sin((a + b)/2) sin((a - b)/2) | sin($a$ + $b$) = sin($a$)cos($b$) + cos($a$)sin($b$) |
| sin(b) – sin(a) = 2 cos(( a + b)/2) sin((b - a)/2) | sin($a$ − $b$) = sin($a$)cos($b$) − cos($a$)sin($b$) |

On rappelle également que cos($-a$) = cos($a$) et sin($-a$) = −sin($a$).

## 1 Signaux périodiques et apériodiques

Un signal $X(t)$ est dit *périodique de période* $T > 0$ si $X(t) = X(t + T)$ pour tout $t \in$ R (exemple : une sinusoïde pure de fréquence $f = 1/T$ est périodique de période $T$). Remarquer qu'on a alors également $X(t + kT) = X(t)$ pour tous $k \in$ Z et $t \in$ R.

a) Soient $X_1(t)$ et $X_2(t)$ deux signaux périodiques de même période $T$. Est-ce que le signal $X_1(t)$+ $X_2(t)$ est périodique? Si oui, avec quelle est période?

b) Soient encore $X_1(t)$ et $X_2(t)$ deux signaux périodiques, mais cette fois avec deux périodes différentes $T_1$ et $T_2$, respectivement. Est-il toujours vrai que la somme $X_1(t) + X_2(t)$ est périodique? (une justification formelle ne vous est pas demandée ici).

*Indication :* Pour avoir une meilleure idée de ce qui peut se passer, on peut chercher la réponse de manière numérique en représentant différents signaux sur www.wolframalpha.com. Ça se fait tout seul! Essayez par exemple simplement de rentrer ces deux formules sur le site : "sin(2 pi t) + cos(4 pi t)" et "sin(2 pi t) + cos(4 t)" *NB :* Cette indication est également valable pour les deux questions suivantes!

c) Un cas particulier : si $T_1$ et $T_2$ sont des nombres entiers, est-ce que le signal $X_1(t) + X_2(t)$ est périodique? Si oui, avec quelle période?

d) Un autre cas particulier : une note produite par un instrument de musique est composée d'une sinusoïde avec une fréquence fondamentale $f_0$ et d'autres sinusoïdes, appelées les *harmoniques*, dont les fréquences sont des multiples de $f_0$. La note est donc un signal de la forme :

$$N(t) = \sum a_n \sin(2\pi n f_0 t),\ {\scriptstyle n\geq 1}$$

où le coefficient $a_n > 0$ est l'amplitude de la $n^e$ harmonique (ce sont ces coefficients qui déterminent le *timbre* de l'instrument). Est-ce que ce signal est périodique? Si oui, avec quelle période?

## 2 Fréquence d'échantillonnage

Soient $f_1 > f_2 > 0$ deux fréquences données. À quelle fréquence $f_e$ minimum doit-on échantillonner le signal de manière à garantir une reconstruction parfaite au moyen de la formule d'interpolation?

a) $X_1(t) = \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t)$

b) $X_2(t) = 2\cos(2\pi f_1 t) - \sin(2\pi f_2 t + \pi/4)$

c) $X_3(t) = \sin(4\pi f_1 t) + \sin(2\pi(f_1 + f_2)t)$

d) $X_4(t) = \sin(2\pi f_1 t) \cdot \sin(2\pi f_2 t)$

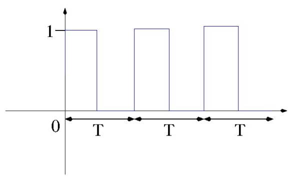
e) $X_5(t) = \cos(2\pi f_1 t) \cdot \sin(2\pi f_2 t)$

## 3 Interlude musical

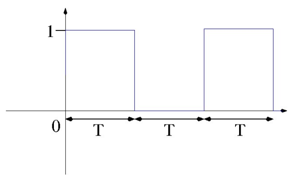
a) A un concert de musique, on veut enregistrer une chanson qui dure 3 :30 minutes à l'aide d'un micro qui échantillonne le son à une fréquence de 44 kHz, et chaque échantillon est quantifié sur 32 bits. Quelle est la taille du fichier audio résultant (si on ignore ici toute autre forme de compression)?

## 4 Filtre à moyenne mobile

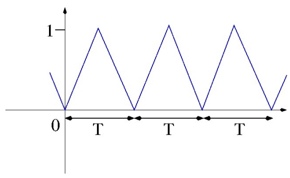
a) Comment les signaux suivants sont-ils transformés après un passage à travers un filtre à moyenne mobile de période $T_c = T$ ? Pas besoin ici de formules mathématiques : des dessins suffiront!



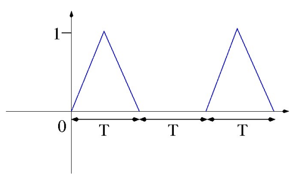

$X_1(t)$




$X_2(t)$ : se rappeler de l'intégrale d'une fonction constante




$X_3(t)$




$X_4(t)$ : se rappeler de l'intégrale d'une fonction linéaire

b) Qu'arrive-t-il à un signal périodique de période $T$ (cf. exercice 1) après un passage à travers un filtre à moyenne mobile de même période $T_c = T$ ?

c) Soit $X(t) = \sin(2\pi f t)$, une sinusoïde pure de fréquence $f$. Montrer qu'après un passage à travers un filtre à moyenne mobile de période $T_c$, l'amplitude du signal sortant $\hat{X}(t)$ satisfait l'inégalité

$$|\hat{X}(t)| \leq |\mathrm{sinc}(f T_c)| \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{R},$$

où on rappelle que $\operatorname{sinc}(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ par définition.

## 5 Accordage d'une guitare et phénomène dit de "battement"

Cet exercice illustre une famille spéciale de signaux obtenus en faisant la somme de deux sinusoïdes pures. Pour accorder une guitare, on joue en même temps sur deux cordes voisines deux notes qui sont censées être identiques en théorie. Si la guitare est mal accordée, on entend une vibration caractéristique (un "battement"), qui disparaît lorsque la guitare est bien accordée. Dans cet exercice, on se propose de comprendre ce phénomène du point de vue mathématique. Supposons pour simplifier que les notes qui sortent d'une guitare soient des sinusoïdes pures. L'onde émise par la première corde est donc $X_1(t) = \sin(2\pi f_1 t)$, tandis que celle émise par la deuxième est $X_2(t) = \sin(2\pi f_2 t)$, avec $f_1$ et $f_2$ proches l'une de l'autre[1]. Quelle est la forme de l'onde résultante $X_1(t) + X_2(t)$.

a) lorsque $f_1$ et $f_2$ sont très proches?

**Approche à suivre : remplacer f2 par** $f_1 + \epsilon$

**et transformer la somme des deux sinusoïdes en un produit de deux termes à l'aide des formules de trigonométrie. Quelles sont les fréquences apparaissant dans ces deux termes?**

b) lorsque $f_1 = f_2$ ?

*Là aussi, vous pouvez vous aider de www.wolframalpha.com pour visualiser le résultat pour $f_1$ et $f_2$ valant respectivement 16 Hz et 17 Hz.*

## 6 Un peu de radio

Cet exercice montre l'application du filtrage à travers un exemple du monde réel. On s'intéresse à la modulation en amplitude (AM). Un signal modulé en amplitude est formé par le produit de deux signaux distincts : le signal contenant l'information que l'on désire transmettre $S(t)$ (du son en général) et l'onde porteuse $P(t)$. Dans cet exercice, on désire transmettre une sinusoïde à 1 kHz en utilisant une onde radio porteuse à 300 kHz.

$$S(t) = \sin(2\pi f_s t) \qquad P(t) = \sin(2\pi f_p t)$$

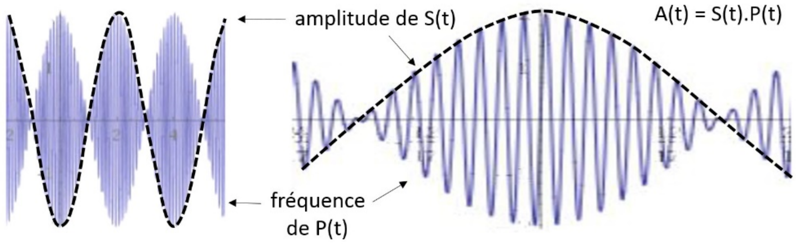
$$f_s = 1 \text{ kHz} \qquad f_p = 300 \text{ kHz}$$

Le signal émis par l'émetteur radio est finalement donné par

$$A(t) = S(t)P(t).$$

Voici une illustration conceptuelle de ce à quoi peut ressembler $A(t)$; les fréquences ne sont pas correctes mais leur grande différence produit ce type de signal qui d'ailleurs a été rencontré dans un exercice précédent.

[1] En pratique, il se peut bien sûr qu'il y ait un déphasage entre les deux ondes, et aussi que les amplitudes ne soient pas rigoureusement les mêmes, mais là aussi, on simplifie.




L'onde porteuse est la sinusoïde de haute fréquence tandis que le signal $S(t)$ est rendu visible par l'enveloppe de l'amplitude de la porteuse.

a) Dans un premier temps, un petit rappel de Physique est nécessaire pour justifier l'emploi de l'onde porteuse. En effet pourquoi n'est-il pas possible de simplement transmettre le signal $S(t)$ directement en émettant une onde radio à 1 kHz?

*En pratique, la longueur d'une antenne pour un récepteur radio doit au moins être de l'ordre du quart de la longueur d'onde du signal à recevoir. La relation entre la fréquence $f$ et la longueur d'onde $\lambda$ d'une onde électromagnétique est $c = \lambda f$, où $c = 3\times10^8$ m/s est la vitesse de la lumière. Sachant cela, calculer et comparer la longueur d'antenne nécessaire pour les deux valeurs de fréquences fournies (signal et porteuse).*

b) Ensuite, du coté de la réception, on obtient $A(t)$ et on cherche à récupérer le signal $S(t)$. On suppose pour ça qu'on connaît la fréquence $f_p$, mais pas forcément la fréquence $f_s$ (seulement qu'elle est bien plus petite que $f_p$).

*Que se passe-t-il si on filtre le signal reçu $A(t)$ avec un filtre à moyenne mobile ayant une durée d'intégration égale à 4 fois la période de l'onde porteuse? Faire une ébauche du résultat en appliquant le filtre sur le dessin conceptuel de droite et en déduire ce qui se passerait sur le cas réel. Quelle est la cause principale de cet effet?*

c) Il s'agit maintenant de transformer $A(t)$ pour 1) conserver l'enveloppe de l'amplitude de $S(t)$, mais 2) tout en supprimant l'effet d'alternance de signe de l'amplitude causée par $P(t)$. L'idée est la suivante : pour supprimer la variation de signe de l'amplitude causée par $P(t)$, il faut rendre ce terme toujours positif au lieu d'alterner entre positif et négatif. Cela se fait facilement en multipliant $A(t)$ une nouvelle fois par $P(t)$. On a alors :

$$A^0(t) = S(t)P(t)P(t).$$

*Utiliser les formules trigonométriques pour transformer $A^0(t)$ en une somme de sinusoïdes. En déduire comment récupérer $S(t)$ à partir de $A^0(t)$.*