M2.L3 : Série d'exercices sur les signaux et l'entropie [Solutions]

1 Signaux

1.1 Questions-test

1.1 b) et c)

1.2 a - L'ajout de la composante continue correspond à une translation selon l'axe des ordonnées.

b- Il faut utiliser un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure infiniment proche de 0. En pratique, cela peut être approché par un filtre à moyenne mobile ayant une fenêtre infiniment grande.

c- Il faut utiliser un filtre passe haut idéal de manière à supprimer le signal de fréquence nulle. Une telle opération n'est pas possible avec un filtre à moyenne mobile.

2. a), c) et d)

3. b)

4. c)

2 Entropie

2.1 Quelques pâtisseries

L'ordre est le suivant: en comptant simplement le nombre d'apparitions des lettres, on voit facilement que

a) < b) = d) < c)

La place de la séquence e) est quant à elle plus difficile à déterminer. En calculant les entropies explicitement (à l'aide d'une machine à calculer ou de http://www.shannonentropy.netmark.pl/), on trouve finalement que

a) < b) = d) < e) < c)

2.2 Quelques pièces de monnaie

a) Observer tout d'abord la ressemblance entre ce problème et le jeu des questions vu au cours. Ici, à la place d'un "oracle" qui nous donne des réponses "oui" ou "non", on a maintenant une balance qui nous indique "penche à gauche", "penche à droite", ou "reste stable". Chaque pesée nous permet donc théoriquement de diviser par 3 (et non par 2) l'ensemble des possibilités. Il s'agit d'effectuer les bonnes pesées pour être le plus efficace possible.

"Numérotons" les 9 pièces par des lettres: ABCDEFGHI. Une d'entre elles est plus légère: il y a donc 9 possibilités en tout. Pour diviser par 3 l'ensemble des possibilités, nous effectuons la pesée suivante:

ABC-DEF

(signifiant qu'on place ABC à gauche et DEF à droite de la balance, les autres pièces GHI restant sur la table.)

Si la balance penche à gauche (ce qu'on note ABC>DEF: le poids de ABC est plus grand que celui de DEF), alors on sait que la pièce plus légère est dans DEF.

Si la balance penche à droite (ce qu'on note ABC<DEF), alors on sait que la pièce plus légère est dans ABC.

Si la balance reste stable (ce qu'on note ABC=DEF), alors on sait que la pièce plus légère est dans GHI.

1

Ainsi, on a bien réduit par 3 l'ensemble des possibilités. Il suffit ensuite de répéter l'opération avec les trois pièces restantes XYZ. Plus précisément, on effectue la pesée:

X-Y

Si X>Y, la pièce plus légère est Y; si X<Y, la pièce plus légère est X; si X=Y, alors forcément, *Z* est la pièce plus légère, toutes les autres ayant le même poids.

En conclusion, 2 pesées suffisent à trouver la pièce défectueuse. Il est à noter que 2 = $\log_3(9)$. C'est la définition de l'*entropie ternaire* (alors que dans le cours, on a affaire à une entropie binaire).

b) Pour ce problème, "numérotons" les 4 pièces par des lettres: ABCD et appelons X la pièce qu'on a dans notre poche et qu'on sait avoir le bon poids. On a de nouveau 9 possibilités:

- ou bien une des 4 pièces est plus légère que les autres;
- ou bien une des 4 pièces est plus lourde que les autres;
- ou bien toutes les pièces ont le même poids.

Pour diviser cet ensemble de 9 possibilités en 3 parties égales, voici la première pesée à effectuer:

AB-CX

(avec donc D qui reste sur la table).

1) Si AB=CX, alors il nous reste bien 3 possibilités: soit la pièce D est plus lourde, soit elle est plus légère, soit toutes les pièces ont le même poids. On effectue donc une deuxième pesée D-X qui nous donne la réponse.

2) Si AB<CX, alors il reste également 3 possibilités: soit l'une des pièces A ou B est plus légère, soit la pièce C est plus lourde. On effectue alors la pesée A-B: si A=B, c'est C qui est plus lourde; si A<B, c'est A qui est plus légère; si A>B, c'est B qui est plus légère.

2) Si AB>CX, alors il reste également 3 possibilités: soit l'une des pièces A ou B est plus lourde, soit la pièce C est plus légère. On effectue alors la pesée A-B: si A=B, c'est C qui est plus légère; si A<B, c'est B qui est plus lourde; si A>B, c'est A qui est plus lourde.

Ainsi, au total, 2 pesées suffisent à répondre aux questions de l'énoncé. Ce n'est à nouveau pas un hasard que 2 = $\log_3(9)$.

2.3 Questions-test

a) AAAAAAHH et HAHAHAHA: L’entropie du premier mot est égale à $(3/4)\log_2(4/3)+(1/4)\log_2(4) = 2 - (3/4)\log_2(3) = 0.811$; celle du deuxième est plus grande: $(1/2)\log_2(2) + (1/2)\log_2(2) = 1$.

b) ABBA et BEBE: L’entropie est égale à 1 dans les deux cas.

c) CALC et CALCUL: L’entropie du premier mot est $1/2\log_2(2) + (1/2)\log_2(4) = 1.5$; celle du deuxième est pus grande: $(2/3)\log_2(3) + (1/3)\log_2(6) = \log_2(3) + 1/3 = 1.918$,

d) MEDITERRANNEE et MEDETERRENNEE: L’entropie du premier mot est clairement plus grande.

e) EPFL et EEPPFFLL: L’entropie est égale à 2 dans les deux cas.