Série 1

---

1 Domaines fondamentaux

Exercice 1. Exhiber des domaines fondamentaux (jolis) pour

1. L'action de $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. L'action de $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)^+_{\mathbf{0}}$ sur $\mathbb{R}^2$.
3. L'action de $(q.\mathbb{Z}, +)$ sur $\mathbb{Z}$ par translations ($q \geqslant 1$).
4. L'action de $(\mathbb{Z}, +)$ sur $\mathbb{R}$ par translations.
5. L'action de $(\mathbb{Z}^2, +)$ sur $\mathbb{R}^2$ par translations.
6. L'action de $(\mathbb{Z} + j\mathbb{Z}, +)$ sur $\mathbb{C}$ par translations ($j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$).
7. L'action du groupe de rotations lineaires de parametres complexes i^n, $n \in \mathbb{Z}$ agissant sur $\mathbb{R}^2$.

2 Theoreme orbite/quotient/stabilisateur, Formule des classes

Exercice 2. Soit $\mathbf{P}_4$ un carre (centre en $\mathbf{0}$), P un sommet et $D_8 = \langle r_4, s\rangle$ son groupe d'isometries (engendre par une rotation d'ordre 4 et une symetrie axiale).

1. Pour les groupes $G = D_8,\ R = \langle r_4\rangle,\ S = \langle s\rangle$ verifier que le Theoreme orbite/quotient/stabilisateur est bien correct : calculer dans chaque cas, l' orbite de P, le stabilisateur de P et verifier l'equalite $|G.P| = |G/G_P|$.

Exercice 3. Dans cet exercice on va boucher les trous de la preuve de Zagier vue en cours sur Theoreme de Fermat pour les sommes de 2 carres.

Théorème 1 (Fermat)**.** *Soit p un nombre premier impair alors p est somme de deux carres d'entiers, cad. il existe $a, b \in \mathbb{Z}^2$ tels que*

$$p = a^2 + b^2$$

ssi $p \equiv 1 \pmod 4$ *(ie.* $4|p-1$*).*

1. Montrer que si $p \equiv 3 \pmod 4$ alors p n'est pas somme de deux carres d'entiers. Pour cela on montrera que pour toute paire d'entiers a, b, $a^2 + b^2$ est soit $\equiv 0 \pmod 2$ soit $\equiv 1 \pmod 4$.
2. On suppose que $p \equiv 1 \pmod 4$ et on a vu qu'il "suffit" de montrer que l'ensemble
$$R_p = \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3,\ p = x^2 + 4yz\},$$
est fini et d'ordre impair. Montrer que R_p est bien fini.
3. On considere l'application
$$S : (x, y, z) \mapsto \begin{cases} (x + 2z, z, y - x - z) & \textit{si } x < y - z \\ (2y - x, y, x - y + z) & \textit{si } y - z < x < 2y \\ (x - 2y, x - y + z, y) & \textit{si } x > 2y \end{cases}$$
Montrer que cette application envoie R_p su R_p et est une involution sur R_p : $S \circ S = \mathrm{Id}_{R_p}$.
4. Montrer que si on pose $p = 1 + 4k$, S (sur R_p) a comme unique point fixe $(1, 1, k)$.
5. En deduire que R_p est impair.

Exercice 4. Montrer le theoreme suivant

Théorème 2. *Soit $G \curvearrowright X$ un groupe fini d'ordre premier p agissant sur un ensemble fini X. Si p ne divise pas le cardinal de X alors l'action de G sur X admet un point fixe : il existe $x \in X$ tel que*
$$\forall g \in G,\ g.x = x.$$

Exercice 5. Le but de cet exercice est de demontrer le Theoreme de Cauchy :

Théorème 3. *Soit G un groupe fini d'ordre n et $p \geqslant 2$ un nombre premier divisant n alors G admet un element g d'ordre p.*

Pour cela on considere le groupe quotient $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ dont on notera les elements
$$\overline{m} = m \pmod p = m + p\mathbb{Z}$$
et
$$\mathcal{F}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, G)_0 = \{\overline{n} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \mapsto g(\overline{n}) \in G,\ g(\overline{0}).g(\overline{1}) \cdots g(\overline{p-1}) = e_G\} \subset (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^G$$
l'ensemble des fonctions de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ a valeurs dans G et dont le produit de toutes les valeurs est egal a l'element neutre e_G.

1. Montrer que $|\mathcal{F}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, G)_0| = |G|^{p-1}$.
2. Montrer que l'action par translations de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur lui-meme induit une action de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, G)_0$. Cette action est a gauche ou a droite, pourquoi ?
3. Montrer que les orbites de l' action $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \curvearrowright \mathcal{F}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, G)_0$ sont de taille 1 ou p.
4. Montrer que les orbites qui sont de taille 1 sont exactement celles des fonctions constantes $\overline{n} \mapsto g$ avec $g \in G$ verifiant
$$g^p = e_G.$$
5. Donner un exemple d'une telle orbite.
6. A l'aide de la formule des classes montrer que le nombre d'orbites de taille 1 est divisible par p.
7. Montrer qu'il existe au moins deux telles orbites et que G possede au moins un element d'ordre p.

Remarque 1. Le Theorem de Cauchy est le point fondamental de la preuve (par recurrence) du :

Théorème 4 (1er Theoreme de Sylow)**.** *Soit G un groupe fini d'ordre n, p un nombre premier divisant n et $v_p(n)$ la p-valuation de n ($v_p(n) \geqslant 1$ est l'exposant de la plus grande puissance de p divisant n, ie. $p^{v_p(n)}|n$ et $p^{v_p(n)+1} \not| n$) alors G possede un sous-groupe P d'ordre exactement $p^{v_p(n)}$.*

Un tel sous-groupe est appele *p-groupe de Sylow de G* (ou simplement p-Syolw de G)et le 2eme Theorem de Sylow dit que tous les p-Sylows de G sont conjugues. Le troisieme Theoreme de Sylow donne des informations sur le nombres de p-Sylows.

3 Questions de transitivite

Exercice 6. On pose
$$(\mathbb{R}^2)^2_1 = \{(P, Q) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2,\ d(P, Q) = 1\}$$
l'ensemble des segments unitaires de $\mathbb{R}^2$: l'ensemble des paires de points de $\mathbb{R}^2$ a distance (euclidienne) 1 l'un de l'autre.

1. Montrer que l'action de $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ sur $\mathbb{R}^2$ induit une action bien définie sur $(\mathbb{R}^2)^2_1$.
2. Montrer que $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ agit transitivement sur $(\mathbb{R}^2)^2_1$.

Exercice 7. Soit $G \curvearrowright X$ un groupe agissant transitivement sur un ensemble. Montrer que les conditions suivantes sont equivalentes :

1. Il existe $x \in X$ tel que le groupe G_x agit transitivement sur l'ensemble $X - \{x\}$.
2. Pour tout $x \in X$, le groupe G_x agit transitivement sur l'ensemble $X - \{x\}$.
3. Le groupe G agit transitivement sur $X \times X - \Delta X$ ou

$$\Delta X = \{(x, x),\ x \in X\} \subset X \times X$$

et l'action est l'action evidente

$$g \star (x, y) := (g.x, g.y).$$

Retrouver ainsi une solution de l'exercice precedent.