



# Introduction à la géométrie Riemannienne

Marc Troyanov

*Ce document contient les notes du cours d'introduction à la géométrie Riemannienne enseigné à l'EPFL. Version du 10 juin 2022.*

(© marc.troyanov, epfl)

# Contents

<b>1</b>	<b>Concepts de base</b>	<b>3</b>
1.1	La notion de variété différentiable . . . . .	3
1.1.1	Espaces tangent et cotangent . . . . .	4
1.1.2	Différentielle d'une application . . . . .	6
1.2	Métriques Riemanniennes, définition . . . . .	7
1.2.1	Premiers exemples . . . . .	8
1.2.2	Rappel d'une métrique par une immersion. . . . .	8
1.2.3	Existence de métriques riemanniennes . . . . .	11
1.2.4	Longueurs, distances et angles . . . . .	12
1.2.5	Isométries . . . . .	14
1.2.6	Volumes et intégration sur une variété riemannienne . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Champs de vecteurs et tenseurs</b>	<b>16</b>
2.1	Sur les champs de vecteurs . . . . .	16
2.2	Champs de tenseurs covariants . . . . .	17
2.2.1	Localisation d'un champ de tenseurs en un point . . . . .	17
2.2.2	Produit tensoriel . . . . .	19
2.3	Tenseurs contravariants et mixtes . . . . .	21
2.3.1	Changement de coordonnées . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Géodésiques et connexions</b>	<b>23</b>
3.1	Les équations d'Euler-Lagrange . . . . .	23
3.1.1	Exemple : L'action classique d'une particule massive sur une variété riemannienne. . . . .	25
3.2	Connexions . . . . .	27
3.2.1	La connexion de Levi-Civita . . . . .	30
3.3	Digression sur les systèmes d'équations différentielles ordinaires . . . . .	32
3.4	Dérivée covariante et transport parallèle . . . . .	33
3.5	La formule de variation première pour la longueur . . . . .	36
3.6	L'application exponentielle . . . . .	38
3.7	Le lemme de Gauss . . . . .	40
3.8	Coordonnées polaires . . . . .	41
3.9	Sur les courbes minimisantes . . . . .	43
3.10	Le théorème de Hopf-Rinow . . . . .	43

<b>4</b>	<b>Courbure des variétés riemanniennes</b>	<b>48</b>
4.1	Le tenseur de Courbure . . . . .	48
4.1.1	La courbure sectionnelle . . . . .	52
4.1.2	Courbure de Ricci et courbure scalaire. . . . .	53
4.2	Sous-variétés et deuxième forme fondamentale . . . . .	54
4.2.1	Définition . . . . .	54
4.2.2	Les équations fondamentales . . . . .	57
4.2.3	Hypersurfaces . . . . .	59
4.2.4	Relation avec le Hessien d'une fonction . . . . .	61
4.3	La formule de variation seconde . . . . .	62
4.4	Le Théorème de Bonnet-Myers. . . . .	65
4.5	Champs de Jacobi et applications . . . . .	67
4.6	Le théorème de Cartan-Hadamard . . . . .	69
4.7	Repère mobile sur une surface . . . . .	73
4.8	La courbure géodésique . . . . .	76
4.9	Formule de Gauss-Bonnet pour un triangle. . . . .	77
4.10	La formule de Gauss-Bonnet globale . . . . .	78

# Chapter 1

## Concepts de base

### 1.1 La notion de variété différentiable

Une *variété topologique* de dimension  $m$  est un espace topologique  $M$  tel que chaque point  $p \in M$  admet un voisinage  $U \subset M$  qui est homéomorphe à un ouvert  $V \subset \mathbb{R}^m$ . Un tel homéomorphisme  $\varphi : U \rightarrow V$  s'appelle une *carte locale de  $M$*  au voisinage de  $p$ , et l'inverse  $\psi = \varphi^{-1} : V \rightarrow U$  s'appelle une *paramétrisation locale de  $M$* .

Afin d'éviter des situations pathologiques, on suppose que l'espace topologique  $M$  est séparé et qu'il admet une base dénombrable d'ouverts (de manière très grossière, il n'existe ni trop d'ouverts, ni trop peu).

Les  $m$  composantes  $\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^m$  d'une carte  $(U, \varphi)$  sont des fonctions continues sur l'ouvert  $U$ , on dit qu'elles forment le *système de coordonnées* sur  $U$  associé à la carte  $\varphi$ . Lorsque la carte  $\varphi$  a été fixée, on note parfois les coordonnées  $x^1, x^2, \dots, x^m : U \rightarrow \mathbb{R}$ .

Si les domaines de deux cartes  $(U, \varphi)$  et  $(U', \varphi')$  ont une intersection non vide, alors il existe un homéomorphisme

$$h : \varphi(U \cap U') \rightarrow \varphi'(U \cap U')$$

tel que  $\varphi' = h \circ \varphi$  sur l'intersection  $U \cap U'$ . Cet homéomorphisme est simplement donné par  $h = \varphi' \circ \varphi^{-1}$  restreint à  $\varphi(U \cap U')$ . Noter que  $\varphi(U \cap U')$  et  $\varphi'(U \cap U')$  sont des ouverts de  $\mathbb{R}^m$ .

On dit que l'homéomorphisme  $h$  est la *transition de la carte  $(U, \varphi)$  vers la carte  $(U', \varphi')$* . On dit aussi plus simplement que  $h$  est le *changement de cartes*.

Un ensemble de cartes  $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$  de la variété  $M$  s'appelle un *atlas* de  $M$  si tout point de  $M$  appartient ou moins à une carte, i.e.  $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ . On dit que l'atlas  $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$  est de classe  $C^k$  si tous les changements de cartes  $h_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$  sont des applications différentiables de classe  $C^k$ . Ceci nous mène à la définition suivante :

**Définition.** Une *variété différentiable* de classe  $C^k$  est une variété  $M$  munie d'un  $C^k$ -atlas  $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$  que l'on suppose maximal (i.e. s'il existe une carte  $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$  telle que  $\mathcal{A} \cup \{(\tilde{U}, \tilde{\varphi})\}$  est un  $C^k$ -atlas, alors cette carte est déjà un élément de l'atlas :  $(\tilde{U}, \tilde{\varphi}) \in \mathcal{A}$ ).

Il est d'ailleurs facile de prouver que tout atlas de classe  $C^k$  d'une variété  $M$  est contenu dans un unique atlas maximal, cette condition n'est donc pas une restriction.

### Exemples de variétés.

1. Tout ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^m$  est naturellement une variété de classe  $C^\infty$ , l'atlas  $\mathcal{A} = \{(U, \text{id})\}$  est clairement un  $C^\infty$ -atlas (car il n'y a aucun changement de cartes).
2. La sphère  $\mathbb{S}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$  est une variété de classe  $C^\infty$ , un exemple d'atlas différentiable est donné par les projections stéréographiques depuis deux points distincts.
3. Si  $M_1$  et  $M_2$  sont des variétés différentiables, alors le produit cartésien  $M_1 \times M_2$  est aussi une variété différentiable.

**Définition (applications différentiables).** Soient  $M$  et  $N$  deux variétés différentiables. On dit qu'une application  $f : M \rightarrow N$  est de classe  $C^k$  au voisinage du point  $p \in M$  s'il existe des cartes  $(U, \varphi)$  au voisinage de  $p$  et  $(W, \psi)$  au voisinage de  $q = f(p)$  telles que l'application

$$\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$$

est différentiable, où  $\Omega = \varphi(U \cap f^{-1}(W)) = \{x \in \varphi(U) \mid f(\varphi^{-1}(x)) \in W\} \subset \mathbb{R}^m$ .

Observons que  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^m$ , l'application  $\tilde{f}$  s'appelle la *représentation de  $f$*  dans les cartes  $(U, \varphi)$  et  $(W, \psi)$ .

On dit que  $f : M \rightarrow N$  est de classe  $C^k$  sur  $M$  si  $f$  est de classe  $C^k$  au voisinage de chaque point de  $M$ . On note  $C^k(M, N)$  l'ensemble des applications  $f : M \rightarrow N$  qui sont de classe  $C^k$  sur  $M$ .

On appelle *fonction différentiable* une application différentiable à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , et on note simplement  $C^k(M) = C^k(M, \mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions de classe  $C^k$  sur  $M$ . Dans le cas des fonctions, la définition précédente se simplifie : une fonction  $h : M \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $C^k$  au voisinage du point  $p \in M$  s'il existe une carte  $(U, \varphi)$  au voisinage de  $p$  telle que

$$h \circ \varphi^{-1} : V \rightarrow \mathbb{R}$$

est de classe  $C^k$ , où  $V = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ .

Il est facile de vérifier que  $C^k(M)$  est une algèbre sur le corps des réels et on a la proposition suivante :

**Proposition 1.1.1** Une application  $f : M \rightarrow N$  entre deux variétés différentiables est de classe  $C^k$  si et seulement si pour toute fonction  $h \in C^k(N)$  on a  $h \circ f \in C^k(M)$ . Dans ce cas l'application

$$f^* : C^k(N) \rightarrow C^k(M), \quad f^*h := h \circ f$$

est un homomorphisme de  $\mathbb{R}$ -algèbres.

#### 1.1.1 Espaces tangent et cotangent

Soit  $M$  une variété différentiable de dimension  $m$  et  $p$  un point de  $M$ . On peut définir la notion de vecteur tangent à  $M$  en  $p$  de deux manières différentes.

**Point de vue différentiel :** Un vecteur tangent  $X$  en  $p$  est une dérivation ponctuelle en ce point. C'est-à-dire une application  $\mathbb{R}$ -linéaire  $X : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant la règle de Leibniz :

$$X(fg) = f(p)X(g) + g(p)X(f).$$

**Point de vue cinématique :** Un vecteur tangent  $v$  en  $p$  est une classe d'équivalence de courbes  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $\gamma(0) = p$  pour la relation d'équivalence

$$\gamma_1 \sim_p \gamma_2 \iff \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} h(\gamma_1(t)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} h(\gamma_2(t))$$

pour tout  $h \in C^\infty(M)$ . On note alors  $v = [\gamma]_p$  ou  $v = \dot{\gamma}(0)$  la classe de  $\gamma$ .

Ces deux points de vues sont équivalents via la bijection qui associe à  $v = \dot{\gamma}(0)$  la dérivation  $X = \partial_v : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\partial_v(h) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} h(\gamma(t))$  (c'est la notion de dérivée directionnelle).

Ces deux points de vues sont mathématiquement équivalents, mais ils correspondent à deux intuitions différentes de la notion de vecteur tangent. On écrira en général  $v, w, e$  ou  $\vec{e}$  (etc.) pour un vecteur tangent vu comme une classe d'équivalence de courbes (point de vue cinématique) et  $X, Y$  (où  $X_p$  si on veut indiquer le point  $p$ ) pour un vecteur tangent vu comme dérivation (point de vue différentiel).

L'espace tangent à  $M$  en  $p$  est l'ensemble des vecteurs tangents, on le note  $T_p M$ . C'est un espace vectoriel (c'est évident à partir du point de vue différentiel). Le dual  $T_p^* M = \text{Hom}(T_p M, \mathbb{R})$  s'appelle l'espace cotangent et un élément  $\theta \in T_p^* M$  s'appelle un vecteur cotangent ou un covecteur en  $p$ .

**Exemple.** Si  $h$  est une fonction  $C^1$  définie au voisinage de  $p$ , on définit un covecteur  $dh_p \in T_p^* M$  par

$$dh_p(X) = X(h).$$

Ce covecteur s'appelle la différentielle de  $h$  en  $p$ . On le note parfois  $d_p h$ . Observer que si  $v = \dot{\gamma}(0)$ , alors on a  $dh_p(v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} h(\gamma(t))$ .

**Théorème 1.1.2** Si  $x^1, x^2, \dots, x^m$  est un système de coordonnées locales au voisinage de  $p$  (associé à une carte  $(U, \varphi)$  au voisinage de  $p$ ), alors

$$dx^1, dx^2, \dots, dx^m \quad \text{est une base de } T_p^* M$$

et

$$\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m} \quad \text{est une base de } T_p M.$$

En particulier  $\dim T_p M = \dim T_p^* M = \dim(M)$ . On remarque aussi que

$$dx^i \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_j^i, \tag{1.1.1}$$

les deux bases sont donc en dualité.

**Remarques.**

(a) Si on veut indiquer le point  $p$ , alors on écrit  $dx_p^i$  et  $\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p$ .

(b)  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  est une abréviation pour

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p h = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\varphi(p)} (h \circ \varphi^{-1})$$

où  $(U, \varphi)$  est la carte sur  $M$  définissant le système de coordonnées  $(x^i)$ .

Si  $y^1, \dots, y^n$  est un autre système de coordonnées au voisinage de  $p$ , alors on a les relations

$$dy^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^j} dx^j \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial y^i} = \frac{\partial x^j}{\partial y^i} \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad (1.1.2)$$

où on a utilisé la convention de sommation (on somme de 1 à  $m$  sur les indices répétés). Ces formules sont à connaître par coeur, elles font apparaître la matrice jacobienne du changement de coordonnées comme matrice de changement de base sur l'espace tangent.

### 1.1.2 Différentielle d'une application

Soient  $f \in C^k(M, N)$  une application différentiable entre deux variétés différentiables  $M$  et  $N$ . Pour tout point  $p \in M$  on définit alors une application  $df_p : T_p M \rightarrow T_q M$  où  $q = f(p)$  par

$$df_p(X)(h) = X(h \circ f)$$

pour tout  $X \in T_p M$ . L'application  $df_p$  s'appelle la *différentielle de  $f$  en  $p$*  et le vecteur  $df_p(X) \in T_q M$  s'appelle le *vecteur image directe* de  $X$  par  $f$ . On note parfois  $f_*$  pour  $df_p$ , cette notation permet d'écrire la définition de la différentielle sous la forme.

$$f_* X := X \circ f^*.$$

Il est clair que  $df_p$  est linéaire. Si on pense à un vecteur comme une classe d'équivalence de courbes,  $v = [\gamma]_p$  alors  $df_p(v)$  est simplement le vecteur  $[f \circ \gamma]_q$ .

Si  $(U, \varphi)$  est une carte au voisinage de  $p$  et  $x^1, \dots, x^m$  sont les coordonnées associées, et  $(W, \psi)$  est une carte au voisinage de  $q$  avec coordonnées  $y^1, \dots, y^n$ , alors la différentielle de  $f$  en  $p$  vérifie

$$df_p \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \frac{\partial f^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j}, \quad (1.1.3)$$

(on utilise encore la convention de sommation) où  $f^j$  est la  $j^{\text{ème}}$  composante de  $f$ . La matrice de  $df_p$  dans les bases  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  et  $\frac{\partial}{\partial y^j}$  est donc la matrice jacobienne  $\left( \frac{\partial f^j}{\partial x^i} \right)$ .

**Remarque.** Lorsque les systèmes de coordonnées  $(x^i)$  et  $(y^j)$  ont été fixés, on peut écrire l'expression précédente sous la forme

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = df_p \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)$$

**Définition.** Une application  $f \in C^k(M, N)$  est une *immersion* de  $M$  dans  $N$  si la différentielle  $df_p$  est injective pour tout  $p$ , i.e.  $df_p(X) = 0 \Rightarrow X = 0$ . L'application  $f$  est un *plongement* si c'est une immersion qui définit un homéomorphisme sur son image. C'est un *difféomorphisme* si c'est une immersion  $f : M \rightarrow N$  qui est bijective, dans ce cas  $f^{-1} : N \rightarrow M$  est aussi un difféomorphisme.

Les théorèmes du calcul différentiel dans l'espace euclidien qui sont de nature locale sont encore vrai pour les applications entre variétés. Citons en particulier le résultat suivant :

**Théorème 1.1.3 (Théorème d'inversion locale)** Si  $f : M \rightarrow N$  est une application de classe  $C^k$  entre les variétés différentiables  $M$  et  $N$ , et si la différentielle  $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  est inversible, alors il existe un voisinage  $U \subset M$  de  $p$  tel que la restriction de  $f$  à  $U$  est un difféomorphisme sur son image.

## 1.2 Métriques Riemanniennes, définition

**Définition** Une *métrique riemannienne* sur une variété différentiable est la donnée d'un produit scalaire sur chaque espace tangent qui varie différemment. De façon concrète, une métrique Riemannienne  $g$  sur la variété différentiable  $M$  est la donnée pour tout point  $p$  d'une application

$$g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

telle que

- 1.)  $g_p$  est un produit scalaire, i.e.
  - a.) Pour tout  $p \in M$ ,  $g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  est bilinéaire.
  - b.)  $g_p(X, Y) = g_p(Y, X)$  pour tous  $X, Y \in T_p M$ .
  - c.)  $g_p(X, X) > 0$  pour tout  $X \in T_p M \setminus \{0\}$ .
- 2.) Pour toute carte  $(U, \varphi)$ , les  $m^2$  fonctions  $g_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$  définies par

$$p \mapsto g_{ij}(p) = g_p \left( \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right)$$

sont différentiables, où  $x^1, \dots, x^m$  est le système de coordonnées associé à  $\varphi$ .

Une *variété riemannienne*  $(M, g)$  est une variété différentiable munie d'une métrique Riemannienne  $g$ . On dit que  $g$  est la *tenseur métrique* de la variété riemannienne et que les  $g_{ij}$  sont les *composantes* de la métrique dans les coordonnées  $(x^i)$ .

**Remarques.** 1.) Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on note aussi  $\langle X, Y \rangle_p = g_p(X, Y)$  et on dit que c'est le *produit scalaire* de  $X$  et  $Y$ .

2.) De même, on note  $\|X\|_p = \sqrt{g_p(X, X)}$  et on dit que c'est la *norme* de  $X$ .

3.) Les composantes de  $g$  vérifient  $g_{ij} = g_{ji}$  et  $(g_{ij}(p))$  est une matrice symétrique définie positive.

4.) Dans un domaine  $U$  de coordonnées  $x^1, \dots, x^m$ , on peut écrire la métrique  $g$  sous la forme

$$g_p = g_{ij}(p) dx^i dx^j$$

(toujours avec la convention de sommation). Cette formule s'interprète de la façon suivante :

si  $X = \sum_{\mu} a^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$  et  $Y = \sum_{\nu} b^{\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}$  sont des vecteurs tangents en  $p$ , alors

$$\begin{aligned} g_p(X, Y) &= g_{ij}(p) dx^i(X) dx^j(Y) \\ &= g_{ij}(p) dx^i \left( a^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \right) dx^j \left( b^{\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \right) \\ &= g_{ij}(p) a^{\mu} \delta_{\mu}^i b^{\nu} \delta_{\nu}^j \\ &= g_{ij}(p) a^i b^j. \end{aligned}$$



### 1.2.1 Premiers exemples

**Exemple 1.** Le produit scalaire standard de  $\mathbb{R}^n$  définit une métrique Riemannienne par la formule

$$g_p(X, Y) = \langle X, Y \rangle_{\mathbb{R}^n}$$

pour tout  $p$ . On appellera cette métrique la *métrique euclidienne standard* sur  $\mathbb{R}^n$ . Pour cette métrique on a  $g_{ij} = \delta_{ij}$  et donc

$$g = \sum_{i=1}^n (dx^i)^2.$$

**Exemple 2.** Si  $(M, g)$  est une variété riemannienne et  $N \subset M$  est une sous variété, alors on obtient une métrique riemannienne  $g^N$  sur  $N$  par restriction :

$$g_p^N(X, Y) = g(X, Y),$$

pour tous  $p \in N$  et tous  $X, Y \in T_p N \subset T_p M$ . En particulier toute sous-variété  $N$  de  $\mathbb{R}^d$  est naturellement une variété riemannienne par restriction à  $N$  de la métrique euclidienne standard.

**Exemple 3.** Si une métrique  $g$  est donnée sur une variété  $M$ , alors pour toute fonction  $u \in C^\infty(M)$  on obtient une nouvelle métrique riemannienne  $g'$  sur  $M$  en posant  $g' = e^{2u}g$ , c'est-à-dire

$$g'_p(X, Y) = e^{2u(p)} g_p(X, Y) \quad \forall X, Y \in T_p M.$$

La métrique  $g'$  s'appelle une *déformation conforme* de la métrique  $g$  et la fonction  $e^u$  est le *facteur conforme*. Lorsque  $u$  est constante, on dit que  $g'$  s'obtient par *homothétie* ou *dilatation* de  $g$ .

Un cas particulier important est celui de la *métrique de Poincaré* dans le  $\frac{1}{2}$ -espace :

$$g = \frac{1}{(x^n)^2} \sum_{i=1}^n (dx^i)^2 \quad \text{sur} \quad \mathbb{H}^n = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^n > 0\}.$$

Il s'agit d'une déformation conforme de la métrique euclidienne, les composantes de cette métrique sont

$$g_{ij} = \frac{1}{(x^n)^2} \delta_{ij}.$$

### 1.2.2 Rappel d'une métrique par une immersion.

Soit  $f \in C^\infty(M, N)$  une immersion entre les variétés différentiables  $M$  et  $N$ ; rappelons que cela signifie que  $f$  est différentiable et que la différentielle  $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  est injective pour tout point  $p$  de  $M$ .

**Définition.** Si  $g$  est une métrique Riemannienne sur  $N$ , alors on définit une métrique Riemannienne  $f^*g$  sur  $M$  par

$$f^*g_p(X, Y) = g_{f(p)}(df_p(X), df_p(Y)), \quad (1.2.1)$$

pour tous  $X, Y \in T_p M$ . Cette métrique s'appelle le *rappel* de  $g$  par l'immersion  $f$  ("pull-back" en anglais).

En coordonnées locales le rappel d'une métrique  $g$  s'obtient de la manière suivante. Soient  $x^1, x^2, \dots, x^m$  des coordonnées locales sur  $M$  au voisinage du point  $p$  et  $y^1, y^2, \dots, y^n$  des coordonnées locales sur  $N$  au voisinage de  $q = f(p)$ . L'application  $f$  s'exprime alors par ses  $n$  composantes qui sont des fonctions de  $m$  variables :

$$y^\mu = f^\mu(x^1, \dots, x^m), \quad \mu = 1, \dots, n. \quad (1.2.2)$$

Les composantes de  $\tilde{g} = f^*g$  sont alors données par

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{ij}(x) &= \tilde{g}_x \left( \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = (f^*g)_x \left( \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = g_{f(x)} \left( f_* \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right), f_* \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \right) \\ &= g_y \left( \frac{\partial f^\mu}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^\mu}, \frac{\partial f^\nu}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^\nu} \right) = \frac{\partial f^\mu}{\partial x^i} \frac{\partial f^\nu}{\partial x^j} g_{\mu\nu}(y) \\ &= \frac{\partial f^\mu}{\partial x^i} \frac{\partial f^\nu}{\partial x^j} g_{\mu\nu}(y). \end{aligned}$$

L'équation reliant les métriques  $g$  et  $\tilde{g} = f^*g$  est donc

$$\tilde{g}_{ij}(x) = g_{\mu\nu}(y) \frac{\partial y^\mu}{\partial x^i} \frac{\partial y^\nu}{\partial x^j}, \quad (1.2.3)$$

où les variables  $y^\mu$  sont reliées aux variables  $x^i$  par (1.2.2).

On peut écrire cette formule de transformation sous la forme matricielle suivante :

$$(\tilde{g}_{ij}(x)) = Df^\top \cdot (g_{\mu\nu}(y)) \cdot Df, \quad (1.2.4)$$

où  $Df = \left( \frac{\partial y^\mu}{\partial x^i} \right)$  est la matrice Jacobienne de  $f$ .

Lorsque  $(N, g)$  est l'espace euclidien, i.e. l'espace  $\mathbb{R}^n$  muni du produit scalaire standard  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , alors le rappel de la métrique euclidienne par l'immersion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  s'écrit simplement

$$\tilde{g}_{ij}(x) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x^i}, \frac{\partial f}{\partial x^j} \right\rangle. \quad (1.2.5)$$

Ce tenseur métrique s'appelle classiquement la *première forme fondamentale* de  $f$ .

Il est parfois plus simple de calculer le rappel d'une métrique en écrivant la métrique  $g$  sur  $N$  sous la forme  $g_y = g_{\mu\nu}(y) dy^\mu dy^\nu$  puis en remplaçant  $y$  par  $f(x)$  et  $dy^\mu$  par  $df^\mu$ . Avec cette écriture on obtient immédiatement

$$\tilde{g}_{ij}(x) dx^i dx^j = g_{\mu\nu}(f(x)) df^\mu df^\nu \quad (1.2.6)$$

avec

$$df^\mu = \frac{\partial f^\mu}{\partial x^i} dx^i.$$

Cette méthode est particulièrement utile lorsqu'on choisit de ne pas numéroter les coordonnées (voir exemples 2 et 3 ci-dessous).

**Exemple 1.** Le graphe d'une fonction  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ , où  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^m$  est l'hypersurface de  $\mathbb{R}^{m+1}$  suivante:

$$\{(x^1, \dots, x^m, x^{m+1}) \mid (x^1, \dots, x^m) \in U \text{ et } x^{m+1} = \varphi(x^1, \dots, x^m)\}.$$

Pour calculer la première fondamentale de cette hypersurface dans les coordonnées  $(x^i)$ , on paramétrise l'hypersurface par l'application  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$  donnée par

$$f(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^m, \varphi(x^1, \dots, x^m)).$$

On a en notations cartésiennes

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \left( 0, \dots, 1, \dots, 0, \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \right)$$

(avec le 1 en  $i^{\text{ème}}$  position), et donc

$$\tilde{g}_{ij}(x) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x^i}, \frac{\partial f}{\partial x^j} \right\rangle_{\mathbb{R}^{m+1}} = \delta_{ij} + \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} = \begin{cases} 1 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \right)^2 & \text{si } i = j, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Si on préfère calculer le tenseur métrique à partir de la formule générale (1.2.3), alors on observe que les composantes de  $f$  sont

$$f^\mu(x^1, \dots, x^m) = x^\mu \text{ pour } \mu \leq m \quad \text{et} \quad f^{m+1}(x^1, \dots, x^m) = \varphi(x^1, \dots, x^m), \quad (1.2.7)$$

donc

$$\frac{\partial f^\mu}{\partial x^i} = \delta_i^\mu \text{ pour } \mu \leq m \quad \text{et} \quad \frac{\partial f^{m+1}}{\partial x^i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}.$$

D'autre part  $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ , par conséquent la formule (1.2.3) nous donne

$$\tilde{g}_{ij} = \delta_{\mu\nu} \frac{\partial f^\mu}{\partial x^i} \frac{\partial f^\nu}{\partial x^j} = \sum_{\rho=1}^{m+1} \frac{\partial f^\rho}{\partial x^i} \frac{\partial f^\rho}{\partial x^j} = \sum_{\rho=1}^m \delta_i^\rho \delta_j^\rho + \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} = \delta_{ij} + \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j}.$$

Une troisième façon d'obtenir le tenseur métrique du graphe de  $\varphi$  est d'écrire directement

$$\tilde{g} = f^*((dy^1)^2 + \dots + (dy^m)^2 + (dy^{m+1})^2) = (df^1)^2 + \dots + (df^m)^2 + (df^{m+1})^2.$$

En utilisant (1.2.7), on a alors

$$\tilde{g} = (dx^1)^2 + \dots + (dx^m)^2 + (d\varphi)^2 = \left( \delta_{ij} + \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \right) dx^i dx^j$$

Matriciellement

$$(\tilde{g}_{ij}) = (\delta_{ij} + \varphi_i \varphi_j) = \begin{pmatrix} 1 + \varphi_1^2 & & \varphi_1 \varphi_j \\ & \ddots & \\ \varphi_i \varphi_j & & 1 + \varphi_m^2 \end{pmatrix}$$

où on a noté  $\varphi_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$ .

**Exemple 2.** On souhaite calculer la métrique euclidienne du plan en coordonnées polaires. Dans les coordonnées cartésiennes  $x, y$  la métrique euclidienne s'écrit  $g = dx^2 + dy^2$ . Les coordonnées polaires sont définies sur un domaine simplement connexe de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  par

$$x = x(r, \theta) = r \cos(\theta), \quad y = y(r, \theta) = r \sin(\theta).$$

On a donc

$$\begin{cases} dx = \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta = \cos(\theta) dr - r \sin(\theta) d\theta \\ dy = \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta = \sin(\theta) dr + r \cos(\theta) d\theta \end{cases}$$

Un calcul simple nous donne alors

$$g = dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2.$$

**Exemple 3.** Ecrivons le tenseur métrique euclidien de  $\mathbb{R}^3$  en coordonnées sphériques: Ces coordonnées sont données par

$$\begin{cases} x = r \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ y = r \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ z = r \cos(\theta). \end{cases}$$

Ces formules représentent un difféomorphisme

$$\{(r, \theta, \varphi) \mid 0 < r, -\pi < \varphi < \pi, 0 < \theta < \pi\} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \mid x \leq 0 \text{ et } y = 0\}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} dx &= \cos(\varphi) \sin(\theta) dr - r \sin(\varphi) \sin(\theta) d\varphi + r \cos(\varphi) \cos(\theta) d\theta \\ dy &= \sin(\varphi) \sin(\theta) dr + r \cos(\varphi) \sin(\theta) d\varphi + r \sin(\varphi) \cos(\theta) d\theta \\ dz &= \cos(\varphi) dr - r \sin(\varphi) d\theta, \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \tilde{g} = dx^2 + dy^2 + dz^2 &= dr^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\varphi^2 + r^2 d\theta^2 \\ &= dr^2 + r^2 (\sin^2(\theta) d\varphi^2 + d\theta^2). \end{aligned}$$

### 1.2.3 Existence de métriques riemanniennes

Nous terminons ce chapitre par le résultat d'existence suivant :

**Proposition 1.2.1** *Toute variété différentiable admet une métrique Riemannienne.*

**Preuve.** On démontre dans le cours de variété différentiables que pour tout atlas différentiable  $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$  de la variété  $M$  il existe une collection de fonctions  $\eta_i \in C^\infty(M)$  telles que

i.)  $\text{supp}(\eta_i) \subset U_i$ .

ii.)  $\eta_i(x) \geq 0$  pour tout  $x \in M$ .

iii.)  $\sum_{i \in I} \eta_i(x) = 1$  pour tout  $x \in M$ .

Une telle collection  $\{\eta_i\}$  s'appelle une *partition différentiable de l'unité* associée à l'atlas  $\mathcal{A}$ . Choisissons donc un atlas de  $M$  est une partition de l'unité associée. Notons  $g_i$  la métrique riemannienne sur  $U_i$  obtenue en rappelant la métrique euclidienne de  $\mathbb{R}$  par la carte  $\varphi_i$ . Il est alors facile de vérifier que la formule

$$g_p(X, Y) = \sum_{i \in I_p} \eta_i(p) g_i(X, Y),$$

où  $I_p = \{i \in I \text{ t.q. } p \in U_i\}$ , définit une métrique Riemannienne globale sur  $M$ . □

Un autre moyen de prouver cette proposition est de se référer au *théorème de plongement de Whitney*. Ce théorème dit que pour toute variété différentiable, il existe un plongement  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^N$  de classe  $C^\infty$  pour  $N$  suffisamment grand<sup>1</sup>. On peut alors simplement choisir comme métrique  $g$  la première forme fondamentale du plongement  $f$ , i.e. la métrique obtenue en rappelant par  $f$  la métrique euclidienne de  $\mathbb{R}$ .

Observons toutefois que cette preuve ne représente pas un argument fondamentalement différent. En effet le théorème de plongement de Whitney se démontre en utilisant une partition de l'unité.

#### 1.2.4 Longueurs, distances et angles

Une *courbe* de classe  $C^k$  dans une variété différentiable  $M$  est une application  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  de classe  $C^k$ . Rappelons que cela signifie que pour toute carte  $(U, \varphi)$  de l'atlas différentiable de  $M$  l'application  $\varphi \circ \gamma : \gamma^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}$  est différentiable. Observons que  $\gamma^{-1}(U)$  est l'ensemble des  $t \in [a, b]$  tels que  $\gamma(t) \in U$ , c'est un ouvert relatif de  $[a, b]$ .

Une courbe de classe  $C^k$   $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  définit en tout  $t \in [a, b]$  un vecteur tangent  $X = \dot{\gamma}(t)$ , appelé le *vecteur vitesse* de  $\gamma$  en  $t$ , via la dérivation

$$X(f) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} f(\gamma(t+s)).$$

**Définition.** Soit  $(M, g)$  une variété différentiable. La *longueur* de la courbe de classe  $C^1$   $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  est l'intégrale de la norme du vecteur vitesse :

$$\ell_g(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|_g dt = \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt.$$

Cette notion vérifie trois propriétés simples mais importantes:

**Lemme 1.2.2** *i.)  $\ell_g(\gamma) \geq 0$  et  $\ell_g(\gamma) = 0$  si et seulement si la courbe  $\gamma$  est constante.*

---

<sup>1</sup>On peut prouver que  $N = 2 \dim(M) + 1$  est suffisant.

ii.) La longueur est indépendante par changement de paramétrisation: si  $h : [a', b'] \rightarrow [a, b]$  est un difféomorphisme, alors

$$\ell_g(\gamma \circ h) = \ell_g(\gamma).$$

iii.) La longueur est additive : pour tout  $c \in [a, b]$  on a

$$\ell_g(\gamma) = \ell_g(\gamma|_{[a,c]}) + \ell_g(\gamma|_{[c,b]}).$$

On dit que  $\gamma : [a, b] \rightarrow (M, g)$  est une courbe  $C^k$  par morceaux si cette application est continue et il existe une subdivision  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$  tel que chaque restriction  $\gamma|_{[t_j, t_{j+1}]}$  est une courbe de classe  $C^k$ . La longueur d'une telle courbe est la somme des longueurs de ses arcs différentiables :

$$\ell_g(\gamma) := \sum_{j=0}^{k-1} \ell_g(\gamma|_{[t_j, t_{j+1}]}) .$$

Nous pouvons maintenant définir la distance entre deux points sur une variété riemannienne.

**Définition.** La distance entre deux points  $p$  et  $q$  d'une variété riemannienne  $(M, g)$  est l'infimum des longueurs des courbes différentiables par morceaux reliant ces deux points.

$$d_g(p, q) = \inf \{ \ell_g(\gamma) \mid \gamma : [a, b] \rightarrow M, \gamma(a) = p, \gamma(b) = q, \gamma \text{ est } C^1 \text{ par morceaux} \}$$

On a alors :

**Proposition 1.2.3** La distance vérifie les propriétés suivantes pour tous  $p, q, x \in M$  :

a.)  $d_g(p, q) \geq 0$  et  $d_g(p, q) = 0$  si et seulement si  $p = q$ .

b.)  $d_g(q, p) = d_g(p, q)$ .

c.)  $d_g(p, q) \leq d_g(p, x) + d_g(x, q)$ .

d.)  $d_g(p, q) < \infty$  si et seulement si  $p$  et  $q$  sont éléments de la même composante connexe de  $M$ .

Ainsi chaque composante connexe de  $(M, g)$  est un espace métrique pour la distance  $d_g$ , en particulier cela définit une topologie sur  $M$ .

**Proposition 1.2.4** Pour toute métrique riemannienne  $g$  sur la variété différentiable connexe  $M$ , la topologie induite par la distance  $d_g$  coïncide avec la topologie de variété de  $M$ .

Une métrique riemannienne permet aussi de définir une notion d'angle entre deux vecteurs d'un même espace tangent.

**Définition.** L'angle  $\alpha$  entre deux vecteurs tangents  $v, w$  à  $M$  au point  $p$  est défini par

$$\cos(\alpha) = \frac{g_p(v, w)}{\sqrt{g_p(v, v)g_p(w, w)}} = \frac{\langle v, w \rangle_p}{\|v\|_p \|w\|_p}$$

### 1.2.5 Isométries

### 1.2.6 Volumes et intégration sur une variété riemannienne

Soit  $h : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue à support compact sur une variété riemannienne  $(M, h)$ .

On souhaite définir l'intégrale

$$\int_M h dV_g.$$

On commence par le cas où le support de  $h$  est contenu dans le domaine  $U$  d'une carte  $(U, \varphi)$ .

Si  $y^1, \dots, y^m$  sont les coordonnées associées à cette carte, alors on pose par définition :

$$\int_M h dV_g := \int_{\varphi(U)} h(\varphi^{-1}(y)) \cdot \sqrt{\det(g_{ij}(y))} dy^1 \cdots dy^m.$$

**Lemme 1.2.5** *Cette définition de l'intégrale ne dépend pas du système de coordonnées sur  $U$ .*

**Preuve** Si  $x^1, \dots, x^m$  est un autre système de coordonnées sur  $U$  et si on note  $\tilde{g}_{ij}$  les composantes du tenseur métrique dans ces coordonnées, alors on a grâce à la relation (1.2.4)

$$\det(\tilde{g}_{ij}(x)) = \det(g_{ij}(y)) \cdot \det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)^2.$$

En appliquant la formule du changement de variables dans les intégrales, on a donc

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\varphi}(U)} h(\tilde{\varphi}^{-1}(x)) \cdot \sqrt{\det(\tilde{g}_{ij}(x))} dx &= \int_{\tilde{\varphi}(U)} h(\tilde{\varphi}^{-1}(x)) \cdot \sqrt{\det(g_{ij}(y))} \left| \det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right) \right| dx \\ &= \int_{\varphi(U)} h(\varphi^{-1}(y)) \cdot \sqrt{\det(g_{ij}(y))} dy. \end{aligned}$$

□

Pour définir l'intégrale dans le cas général, on se donne un atlas localement fini  $\mathcal{A} = (U_i, \varphi_i)_{i \in I}$  de  $M$ , cela signifie que tout compact  $K \subset M$  ne rencontre qu'un nombre fini d'ouverts  $U_i$  de l'atlas. On se donne alors une partition de l'unité  $\{\eta_i\}$  associées à cet atlas et on pose

$$\int_M h dV_g := \sum_{i \in I} \int_{U_i} h \eta_i dV_g.$$

La somme est finie car on a supposé que  $h$  est à support compact et l'atlas localement fini. On montre sans difficulté que cette intégrale ne dépend ni du choix de l'atlas ni du choix de la partition de l'unité.

**Remarques. 1.**  $dV_g$  représente donc une mesure sur  $M$ , on l'appelle la *mesure volume* de  $(M, g)$ . En coordonnées locale, cette mesure s'écrit

$$dV_g = \sqrt{\det(g_{ij}(y))} dy.$$

2. Le *volume* d'un ouvert  $U$  de  $M$  est simplement l'intégrale de la fonction 1 sur  $U$  :

$$\text{Vol}_g(U) = \int_U dV_g$$

3. Rappelons que si  $N$  est une sous-variété de dimension  $k$  de la variété riemannienne  $(M, g)$ , alors  $N$  est elle-même une variété riemannienne par restriction de  $g$ . Le volume intrinsèque de  $N$  est alors bien défini et pour le distinguer du volume de  $M$  on dit que c'est le *volume  $k$ -dimensionnel* et on note

$$\text{Vol}_g^k(N).$$

Lorsque  $k = 2$  ou  $k = m - 1$  on parle parfois d'*aire* et non de volume.

4. Si la variété  $M$  est orientée, alors on peut définir de la même manière la *forme volume*

$$\omega_g = \sqrt{\det(g_{ij}(y))} dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n.$$

L'intégrale de la fonction  $h$  par rapport à la mesure  $dV_g$  coïncide alors avec l'intégrale de la forme  $h \cdot \omega_g$ .



## Chapter 2

# Champs de vecteurs et tenseurs

Dans ce chapitre, on donne rapidement quelques notions sur les tenseurs.

### 2.1 Sur les champs de vecteurs

La réunion disjointe  $TM = \cup_{p \in M} T_p M$  possède une structure naturelle de variété  $C^\infty$  de dimension  $2n$ . On note  $\pi : TM \rightarrow M$  la projection canonique ( $\pi(X_p) = p$ ). Cette application est différentiable et le triple  $(TM, \pi, M)$  s'appelle le *fibré tangent*  $M$ .

Un *champ de vecteurs* sur  $M$  est la donnée d'un vecteur tangent en chaque point de  $M$  qui varie de façon  $C^\infty$  avec ce point. On peut le voir comme une *dérivation globale*  $X : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant

$$X(f + g) = X(f) + X(g) \quad \text{et} \quad X(fg) = fX(g) + gX(f).$$

En coordonnées locales, on obtient l'écriture suivante en restreignant le champ de vecteurs  $X$  sur un ouvert  $U \subset M$  muni de coordonnées  $x^1, \dots, x^n$  :

$$X|_U = a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (a^i \in C^\infty(U)).$$

Observer que  $a^i = X(x^i)$ .

On peut aussi voir un champ de vecteurs comme une *section du fibré tangent*, c'est à dire une application différentiable  $X : M \rightarrow TM$  telle que  $\pi \circ X = \text{id}_M$  (c'est donc un inverse à droite de la projection canonique).

On note  $\Gamma(TM)$  ou simplement  $\Gamma(M)$  l'ensemble des champs de vecteurs  $C^\infty$  sur  $M$ . C'est clairement un espace vectoriel, mais c'est aussi un module sur l'algèbre  $C^\infty(M)$  via la multiplication

$$C^\infty \times \Gamma(M) \rightarrow \Gamma(M), \quad (f, X) \mapsto f \cdot X.$$

De la même façon, la réunion disjointe des espaces cotangents  $T^*M = \cup_{p \in M} T_p^*M$  est une variété  $C^\infty$  de dimension  $2n$  et la projection canonique  $\pi : T^*M \rightarrow M$  définie par  $\theta_p \in T_p^*M \rightarrow p = \pi(\theta_p)$  est une application  $C^\infty$ . Le triple  $(T^*M, \pi, M)$  s'appelle le *fibré cotangent* à la variété  $M$ .

Une section du fibré cotangent, i.e. une application différentiable  $\theta : M \rightarrow T^*M$  telle que  $\pi \circ \theta = \text{id}_M$  (concrètement,  $\theta_p \in T_p^*M$  pour tout point  $p$  de  $M$ ) s'appelle un *champ de*

covecteurs ou une forme différentielle de degré 1 (ou plus simplement une 1-forme). On note  $\Gamma(T^*M)$  ou simplement  $\Gamma^*(M)$  l'ensemble des 1-formes sur  $M$  (une autre notation courante est  $\Omega^1(M)$ ). C'est également un module sur l'algèbre  $C^\infty(M)$ .

**Exemple.** Si  $h \in C^\infty(M)$ , alors l'application  $p \rightarrow dh_p$  définit une 1-forme. On la note simplement  $dh \in \Gamma^*(M)$  et on l'appelle la *différentielle* de  $h$ . Plus généralement, si  $h_1, \dots, h_s \in C^\infty(M)$  et  $f_1, \dots, f_s \in C^\infty(M)$  sont des fonctions différentiables sur  $M$ , alors

$$\omega = \sum_{i=1}^s f_i dh_i \tag{2.1.1}$$

définit une 1-forme sur  $M$ .

## 2.2 Champs de tenseurs covariants

**Définition.** Un *champ de tenseurs covariants d'ordre  $k \in \mathbb{N}$*  sur la variété  $M$  est une application

$$T : \underbrace{\Gamma(M) \times \Gamma(M) \times \dots \times \Gamma(M)}_k \rightarrow C^\infty(M)$$

qui est  $C^\infty(M)$  multilinéaire, i.e.  $C^\infty(M)$  linéaire en chaque variable. On note  $\text{Tens}_k(M)$  l'ensemble des champs de tenseurs covariants d'ordre  $k$  sur  $M$ . C'est naturellement un  $C^\infty(M)$ -module.

Pour  $k = 0$ , on convient que  $\text{Tens}_0(M) = C^\infty(M)$ . Un champ de 0-tenseurs s'appelle aussi un *scalaire* (c'est donc une fonction).

### 2.2.1 Localisation d'un champ de tenseurs en un point

Lorsqu'on évalue un tenseur covariant  $T \in \text{Tens}_k(M)$  sur  $k$  champs de vecteurs, on obtient une fonction sur la variété  $M$ . La proposition ci-dessous nous dit que la valeur de cette fonction en un point  $p$  ne dépend que de la valeur des champs de vecteurs en ce point.

**Proposition 2.2.1** *Soit  $M$  une variété différentiable,  $p$  un point de  $M$  et  $T \in \text{Tens}_k(M)$  un champ de tenseurs covariant d'ordre  $k$ . Soient  $X_1, \dots, X_k$  et  $Y_1, \dots, Y_k$  des champs de vecteurs sur  $M$ . Supposons que  $X_i(p) = Y_i(p)$  pour  $1 \leq i \leq k$ . Alors les fonctions  $T(X_1, \dots, X_k)$  et  $T(Y_1, \dots, Y_k)$  de  $C^\infty(M)$  prennent la même valeur en  $p$  :*

$$T(X_1, \dots, X_k)(p) = T(Y_1, \dots, Y_k)(p).$$

Remarquons qu'une partie de la difficulté est de lire correctement ce genre d'énoncé. Il faut en particulier interpréter correctement la notation  $X_i(p)$ . Si  $X$  est un champ de vecteur, c'est une application  $X : M \rightarrow TM$ , donc à tout point  $p$  de  $M$ ,  $X$  associe un vecteur de  $T_pM$ . On le note habituellement  $X_p$ , mais si le champ de vecteur possède un indice, disons  $X_i$ , on préfère noter  $X_i(p)$  plutôt que  $X_{i,p}$ . Toutefois il ne faut pas confondre avec  $X(f)$  où  $f$  est une fonction, dans ce cas  $X(f)$  est la dérivation de  $f$  définie par  $X$ . Ainsi le symbole  $X(\cdot)$  prend deux significations différentes selon que le  $(\cdot)$  représente un point  $p$  de  $M$  ou une fonction  $f \in C^\infty(M)$ .

De même, il faut garder à l'esprit que  $T(X_1, \dots, X_k)$  est un élément de  $C^\infty(M)$ , c'est donc une fonction que l'on peut évaluer en un point  $p$  de  $M$  pour obtenir un nombre réel  $T(X_1, \dots, X_k)(p) \in \mathbb{R}$ .

Pour démontrer la proposition, nous utiliserons le lemme suivant :

**Lemme 2.2.2** Soit  $T \in \text{Tens}_k(M)$  un tenseur d'ordre  $k$  et  $X_1, \dots, X_k \in \Gamma(M)$ . Supposons que l'un de ces champs s'annule au point  $p$ , alors la fonction  $T(X_1, \dots, X_k)$  s'annule aussi en  $p$ .

**Preuve.** Supposons que  $X_i(p) = 0$  et montrons que  $T(X_1, \dots, X_k)(p) = 0$ . On peut choisir un système de coordonnées  $(x^1, \dots, x^n)$  dans un voisinage ouvert  $U$  de  $M$ . La restriction de  $X_1$  à l'ouvert  $U$  peut s'écrire  $X_1 = \sum_j a_j \partial_j$  (où on a noté  $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x^j}$ ) avec  $a_j \in C^\infty(U)$ . Choisissons une fonction  $f \in C^\infty(M)$  à support dans  $U$  et telle que  $f(p) = 1$  et notons  $\tilde{a}_j \in C^\infty(M)$  la fonction qui vaut  $f a_j$  dans l'ouvert  $U$  et 0 sur  $M \setminus U$ . De même notons  $\tilde{\partial}_j \in \Gamma(M)$  le champ de vecteurs qui vaut  $f \partial_j$  dans  $U$  et 0 sur  $M \setminus U$ . On a alors

$$f^2 \cdot X_1 = \sum_j \tilde{a}_j \tilde{\partial}_j,$$

et  $\tilde{a}_j(p) = 0$  pour tout  $j$ . On a alors

$$f^2 T(X_1, X_2, \dots, X_k) = T\left(\sum_j \tilde{a}_j \tilde{\partial}_j, X_2, \dots, X_k\right) = \sum_j \tilde{a}_j T(\tilde{\partial}_j, X_2, \dots, X_k)$$

et cette fonction s'annule en  $p$  car  $\tilde{a}_j(p) = 0$  pour tout  $j$ . On conclut que  $T(X_1, X_2, \dots, X_k)(p) = 0$  puisque  $f(p) = 1$ . □

**Preuve de la proposition.** Sous les hypothèses de la proposition, le lemme implique clairement que

$$T(X_1, X_2, \dots, X_k)(p) = T(Y_1, X_2, \dots, X_k)(p)$$

Si  $k = 1$  la preuve est terminée. Si  $k \geq 2$ , on définit un champ  $S \in \text{Tens}_{k-1}(M)$  par  $S(Z_2, \dots, Z_k) := T(X_1, Z_2, \dots, Z_k)$ . Alors le lemme implique à nouveau que

$$S(X_2, X_3, \dots, X_k)(p) = S(Y_2, X_3, \dots, X_k)(p),$$

c'est-à-dire

$$T(X_1, X_2, X_3, \dots, X_k)(p) = T(Y_1, Y_2, X_3, \dots, X_k)(p).$$

La preuve se conclut par récurrence. □

**Définition.** Si  $T \in \text{Tens}_k(M)$  et  $p \in M$ , on définit une application

$$T_p : \underbrace{T_p M \times \dots \times T_p M}_k \rightarrow \mathbb{R} \tag{2.2.1}$$

de la façon suivante : pour  $X_1, \dots, X_k \in T_p M$ , on choisit des extensions  $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_k \in \Gamma(M)$ , i.e.  $\tilde{X}_i(p) = X_i \in T_p M$  pour tout  $i$  et on pose

$$T_p(X_1, \dots, X_k) = T(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_k)(p) \in \mathbb{R}.$$

La proposition implique que  $T_p(X_1, \dots, X_k)$  est indépendant du choix des extensions  $\tilde{X}_i \in \Gamma(M)$ .

L'application  $T_p$  définie par (2.2.1) est multilinéaire, on l'appelle la *localisation* en  $p$  du champ de tenseurs  $T$ .

**Remarque.** Le principe de localisation des champs de tenseurs implique qu'il y a un identité entre les champs de covecteurs sur  $M$  et les champs de tenseurs covariants d'ordre 1 :

$$\text{Tens}_1(M) = \Gamma^*(M).$$

En effet, à tout  $\theta \in \Gamma^*(M)$  on peut associer l'application linéaire  $\Gamma(M) \rightarrow C^\infty(M)$  définie par

$$(\theta(X))(p) = \theta_p(X_p).$$

La proposition précédente nous dit que réciproquement, tout champs de 1-tenseurs  $T \in \text{Tens}_1(M)$  provient d'un champs de covecteurs.

## 2.2.2 Produit tensoriel

Si  $T \in \text{Tens}_k(M)$  et  $S \in \text{Tens}_l(M)$ , on définit un nouveau champ  $T \otimes S \in \text{Tens}_{k+l}(M)$  par la formule

$$T \otimes S(X_1, X_2, \dots, X_{k+l}) = T(X_1, \dots, X_k)S(X_{k+1}, \dots, X_{k+l})$$

où les  $X_i \in \Gamma(M)$ . Le champ  $T \otimes S$  s'appelle le *produit tensoriel* de  $T$  et  $S$ . Le produit tensoriel est une opération  $C^\infty(M)$ -bilinéaire :

$$(fT_1 + gT_2) \otimes S = f(T_1 \otimes S) + g(T_2 \otimes S) \quad \text{et} \quad T \otimes (fS_1 + gS_2) = f(T \otimes S_1) + g(T \otimes S_2).$$

Il n'est pas commutatif (sauf si  $k = 0$  ou  $l = 0$ ):

$$T \otimes S \neq S \otimes T.$$

**Proposition 2.2.3** Soit  $T \in \text{Tens}_k(M)$  et  $U \subset M$  le domaine d'un système de coordonnées  $x^1, \dots, x^n$ . Alors la restriction de  $T$  à  $U$  s'écrit

$$T|_U = T_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_k}$$

où

$$T_{i_1 \dots i_k} = T \left( \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \right) \in C^\infty(U)$$

**Preuve.** Il suffit d'appliquer la multilinéarité. Nous laissons les détails au lecteur. □

**Définition.** Les fonctions  $T_{i_1 \dots i_k} \in C^\infty(U)$  s'appellent les *composantes* du champ de tenseur  $T$  dans le système de coordonnées  $(x^i)$ .

Soit  $y^1, \dots, y^n$  est un autre système de coordonnées sur un ouvert  $\tilde{U} \subset M$  et notons  $\tilde{T}_{1\dots i_k}$  les composantes du tenseur  $T$  dans ce nouveau système de coordonnées :

$$T|_{\tilde{U}} = \tilde{T}_{i_1\dots i_k} dy^{i_1} \otimes \dots \otimes dy^{i_k}.$$

Supposons que l'intersection de  $U$  et  $\tilde{U}$  est non vide, alors les formules (1.1.2) entraînent que sur cette intersection on a

$$T_{j_1\dots j_k} = \tilde{T}_{i_1\dots i_k} \frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial y^{i_k}}{\partial x^{j_k}} \quad (2.2.2)$$

et de façon équivalente

$$\tilde{T}_{i_1\dots i_k} = T_{j_1\dots j_k} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{j_k}}{\partial y^{i_k}} \quad (2.2.3)$$

**Remarque 1.** En coordonnées locale, la localisation en un point  $p$  d'un tenseur est simplement donnée en évaluant les composantes en ce point et en évaluant les  $dx^i$  en  $p$  :

$$T_p = T_{i_1\dots i_k}(p) dx_p^{i_1} \otimes \dots \otimes dx_p^{i_k}.$$

**Remarque 2.** Ces formules nous conduisent à une autre définition des champs de tenseurs.

**Définition 2.2.4 (définition classique des champs de tenseurs)** *Un champ de tenseurs covariant d'ordre  $k$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  est la donnée pour tout système de coordonnées  $x^1, \dots, x^n$  d'un système de  $n^k$  fonctions différentiables*

$$T_{i_1\dots i_k}(x)$$

telles que si  $y^1, \dots, y^n$  est un autre système de coordonnées alors les formules de changement de coordonnées sont données par (2.2.2).

Voyons un contre-exemple : Si  $h \in C^\infty(U)$  est une fonction, alors

$$h_{ij}(x) = \frac{\partial^2 h}{\partial x^i \partial x^j}$$

ne définit *pas* un champ de tenseurs. En effet, si  $y^1, \dots, y^n$  un autre système de coordonnées, avec  $y = f(x)$  et si  $\tilde{h} = h \circ f^{-1}$ , alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial y^\mu \partial y^\nu} &= \frac{\partial}{\partial y^\mu} \left( \frac{\partial \tilde{h}}{\partial y^\nu} \right) = \frac{\partial}{\partial y^\mu} \left( \frac{\partial x^j}{\partial y^\nu} \frac{\partial h}{\partial x^j} \right) \\ &= \frac{\partial x^j}{\partial y^\nu} \frac{\partial}{\partial y^\mu} \left( \frac{\partial h}{\partial x^j} \right) + \frac{\partial^2 x^j}{\partial y^\mu \partial y^\nu} \cdot \frac{\partial h}{\partial x^j} \\ &= \frac{\partial x^j}{\partial y^\nu} \frac{\partial x^i}{\partial y^\mu} \frac{\partial^2 h}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial^2 x^j}{\partial y^\mu \partial y^\nu} \cdot \frac{\partial h}{\partial x^j} \end{aligned}$$

donc

$$\tilde{h}_{\mu\nu}(y) = h_{ij}(x) \cdot \frac{\partial x^j}{\partial y^\nu} \frac{\partial x^i}{\partial y^\mu} + \frac{\partial^2 x^j}{\partial y^\mu \partial y^\nu} \cdot \frac{\partial h}{\partial x^j}$$

Le second terme de cette somme montre le caractère non tensoriel de  $h_{ij}$ .

D'une manière générale, si  $T \in \text{Tens}(U)$ , alors  $\frac{\partial T}{\partial x^i}$  ne définit pas un champ de tenseurs. Nous reviendrons sur cette question lorsque nous étudierons les connexions.

## 2.3 Tenseurs contravariants et mixtes

**Définition.** Un *tenseur mixte* de type  $\binom{\ell}{k}$  sur la variété  $M$  est une application

$$T : \underbrace{\Gamma(M) \times \cdots \times \Gamma(M)}_k \times \underbrace{\Gamma^*(M) \times \cdots \times \Gamma^*(M)}_\ell \rightarrow C^\infty(M) \quad (2.3.1)$$

qui est  $C^\infty(M)$ -multilinéaire. On dit qu'un tel champ de tenseurs est  $k$ -fois covariant et  $\ell$ -fois contravariant et on note  $\text{Tens}_k^\ell(M)$  le  $C^\infty(M)$ -module formé par ces tenseurs.

Lorsque  $k = 0$ , on dit que  $T$  est un tenseur purement contravariant et si  $\ell = 0$ , alors  $T$  est un tenseur purement covariant.

La notion de produit tensoriel se généralise aux tenseurs mixtes ou contravariant. Il s'agit de l'application bilinéaire

$$\text{Tens}_k^\ell(M) \times \text{Tens}_{k'}^{\ell'}(M) \xrightarrow{\otimes} \text{Tens}_{k+k'}^{\ell+\ell'}(M)$$

définie par

$$T \otimes S(X_1, \dots, X_{k+k'}, \theta^1, \dots, \theta^{\ell+\ell'}) = T(X_1, \dots, X_k, \theta^1, \dots, \theta^\ell) \cdot S(X_{k+1}, \dots, X_{k'}, \theta^{\ell+1}, \dots, \theta^{\ell+\ell'})$$

Le principe de localisation, i.e. la proposition 2.2.1, se généralise aux tenseurs de type  $\binom{\ell}{k}$ . On peut donc restreindre un tenseur  $T$  au domaine  $U \subset M$  d'un système de coordonnées  $(x^i)$  et définir ses composantes dans ce système de coordonnées par

$$T_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_\ell}(x) = T\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}, dx^{j_1}, \dots, dx^{j_\ell}\right). \quad (2.3.2)$$

Le lemme suivant est d'une grande utilité:

**Lemme 2.3.1** *On a une identification naturelle entre les champs de tenseurs de type  $\binom{1}{0}$  et les champs de vecteurs sur une variété différentiable  $M$ . Plus précisément il existe un isomorphisme canonique de  $C^\infty(M)$ -modules:*

$$\Gamma(M) \cong \text{Tens}_0^1(M).$$

**Preuve.** Soit  $X \in \Gamma(M)$  un champ de vecteurs sur  $M$ . On lui associe le tenseur  $T_X \in \text{Tens}_0^1(M)$  défini par

$$T_X(\theta) = \theta(X).$$

Pour prouver que l'application  $X \rightarrow T_X$  est un isomorphisme, il suffit de construire son inverse dans un ouvert de coordonnées. Si  $T \in \text{Tens}_0^1(M)$ , on définit localement un champ de vecteurs par

$$X = a^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \text{avec } a^i = T(dx^i).$$

On a alors clairement  $dx^i(X) = T(dx^i)$  pour tout  $i$  et donc

$$\theta(X) = T(\theta)$$

pour tout  $\theta \in T^*M$ , ce qui signifie que  $T_X = T$ .

□

Grâce à l'identification  $\text{Tens}_0^1(M) \cong \Gamma(M)$ , on constate que dans tout système de coordonnées un tenseur  $T \in \text{Tens}_k^\ell(M)$  peut se reconstruire à partir de ses composantes par la formule

$$T_x = T_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_\ell}(x) dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_k} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_\ell}}. \quad (2.3.3)$$

où les  $T_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_\ell}(x)$  sont données par (2.3.2).

Le lemme 2.3.1 admet la généralisation suivante :

**Proposition 2.3.2** *On a une identification naturelle entre les champs de tenseurs de type  $\binom{1}{k}$  une variété différentiable  $M$  et les applications  $C^\infty(M)$ -multilinéaires du type*

$$T : \underbrace{\Gamma(M) \times \dots \times \Gamma(M)}_k \rightarrow \Gamma(M).$$

**Exemples.** 1. Si  $k = 0$ , il s'agit de l'identification  $\text{Tens}_0^1(M) \cong \Gamma(M)$  du lemme précédent.  
 2. Si  $k = 1$ , cette identification dit que tenseur  $A \in \text{Tens}_1^1(M)$  peut être vue comme une application  $A : \Gamma(M) \rightarrow \Gamma(M)$  qui est  $C^\infty(M)$  linéaire. Il s'agit donc d'un champ d'endomorphismes  $A_p : T_p M \rightarrow T_p M$  pour tout point  $p$  de  $M$ . Pour cette raison on note parfois

$$\text{Tens}_1^1(M) = \text{End}(TM).$$

3. Si  $k = 2$  tout tenseur  $B \in \text{Tens}_2^1(M)$  peut être vue comme une application  $B : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \rightarrow \Gamma(M)$  qui est  $C^\infty(M)$ -bilinéaire.

### 2.3.1 Changement de coordonnées

Pour les tenseurs mixtes, la formule de changement de coordonnées pour les composantes prend la forme suivante : Soit  $U$  un ouvert de  $M$  et  $x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n$  deux systèmes de coordonnées sur ce domaine. Un champ  $T \in \text{Tens}_k^\ell(U)$  s'écrit alors

$$\begin{aligned} T &= T_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_\ell}(x) dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_k} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_\ell}} \\ &= \tilde{T}_{\mu_1 \dots \mu_k}^{\nu_1 \dots \nu_\ell}(y) dy^{\mu_1} \otimes \dots \otimes dy^{\mu_k} \otimes \frac{\partial}{\partial y^{\nu_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial y^{\nu_\ell}}. \end{aligned}$$

En utilisant les relations

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^\mu} dy^\mu, \quad \frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial y^\nu}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^\nu}$$

et la multilinéarité du produit tensoriel, on trouve que

$$\tilde{T}_{\mu_1 \dots \mu_k}^{\nu_1 \dots \nu_\ell}(y) = T_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_\ell}(x) \cdot \frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial y^{\mu_k}} \cdot \frac{\partial y^{\nu_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial y^{\nu_\ell}}{\partial x^{j_\ell}} \quad (2.3.4)$$

## Chapter 3

# Géodésiques et connexions

### 3.1 Les équations d'Euler-Lagrange

**Définitions.** 1.) Soit  $M$  une variété différentiable et  $TM$  son fibré tangent. On appelle *lagrangien* sur  $M$  la donnée d'une fonction différentiable  $f : TM \rightarrow \mathbb{R}$ .

2.) Si  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  est une courbe de classe  $C^1$  dans la variété  $M$ , alors l'*action* de cette courbe pour le lagrangien  $f$  est l'intégrale

$$S_f(\gamma) = \int_a^b f(\dot{\gamma}(t)) dt$$

3.) On appelle *variation* de la courbe  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  une application différentiable  $\phi : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  telle que  $\phi(t, 0) = \gamma(t)$  pour tout  $t \in [a, b]$ .

4.) On dit que la variation  $\phi$  est à *extrémités fixées* si  $\phi(a, s) = \gamma(a)$  et  $\phi(b, s) = \gamma(b)$  pour tout  $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ .

5.) La courbe  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  est une *extrémale* (ou un *point critique*) pour l'action associée au lagrangien  $f$  si pour toute variation  $\phi : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  de  $\gamma$  à extrémités fixées on a

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} S_f(\gamma_s) = 0,$$

où on a noté  $\gamma_s(t) = \phi(t, s)$ .

**Remarque.** Il est commode de noter un élément de  $TM$  sous la forme d'un couple  $(p, v)$ , avec  $p \in M$  et  $v \in T_p M$ . D'un point de vue formel, cette notation est redondante car le point  $p$  est déterminé par le vecteur  $v$  puisqu'on a  $\pi(v) = p$ , mais elle améliore la lisibilité des formules et on l'utilisera fréquemment. Avec cette notation, un lagrangien s'écrit  $f(p, v)$  et l'action s'écrit

$$S_f(\gamma) = \int_a^b f(\gamma, \dot{\gamma}(t)) dt.$$



**Théorème 3.1.1 (Equations d'Euler-Lagrange)** Soit  $f : TM \rightarrow \mathbb{R}$  un lagrangien sur la variété différentiable  $M$  et soit  $U$  le domaine d'un système de coordonnées  $(x^i)$  sur  $M$ . Alors la courbe  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  est une extrémale pour l'action associée à  $f$  si et seulement si

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial v^i} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \quad (3.1.1)$$

pour  $i = 1, \dots, n = \dim(M)$ , où on note  $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$  et  $v^i(t) = \frac{dx^i}{dt}$ .

**Démonstration.** Soit  $\gamma_s(t) = x(t, s)$  une variation de  $\gamma$  à extrémités fixées. Posons  $v(t, s) = \frac{\partial x}{\partial t}$ , alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} S_f(\gamma_s) &= \frac{d}{ds} \int_a^b f(x(t, s), v(t, s)) dt \\ &= \int_a^b \left( \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial v^i} \frac{\partial v^i}{\partial s} \right) dt \\ &= \int_a^b \left( \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial v^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial s \partial t} \right) dt \end{aligned}$$

On peut faire l'intégration par parties suivante :

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial v^i} \cdot \frac{\partial^2 x^i}{\partial s \partial t} dt = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial v^i} \cdot \frac{\partial^2 x^i}{\partial t \partial s} dt = \left[ \frac{\partial f}{\partial v^i} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial s} \right]_{t=a}^b - \int_a^b \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial v^i} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial s} dt.$$

Or nous avons supposé que  $\gamma_s$  est une variation de  $\gamma$  à extrémités fixées, donc

$$\frac{\partial x^i}{\partial s}(a, s) = \frac{\partial x^i}{\partial s}(b, s) = 0$$

pour tout  $s$ . Par conséquent

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial v^i} \cdot \frac{\partial^2 x^i}{\partial s \partial t} dt = - \int_a^b \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial v^i} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial s} dt,$$

et donc

$$\frac{d}{ds} S_f(\gamma_s) = \int_a^b \left( \frac{\partial f}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial v^i} \right) \cdot \frac{\partial x^i}{\partial s} dt.$$

Par conséquent, si les équations (3.1.1) sont satisfaites, alors  $\gamma$  est une extrémale de l'action. Réciproquement, si  $\gamma$  est une extrémale de l'action, alors

$$\left[ \int_a^b \left( \frac{\partial f}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial v^i} \right) \cdot \frac{\partial x^i}{\partial s} dt \right]_{s=0} = 0$$

pour toute variation de  $\gamma$  à extrémités fixées. Les équations d'Euler-Lagrange suivent alors du *lemme de Du Bois-Reymond* (ou *lemme fondamental du calcul des variations*). Ce lemme dit que si  $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction continue telle que

$$\int_a^b \sum_i w_i(t) h_i(t) dt = 0$$

pour toute fonction  $h \in C^\infty([a, b], \mathbb{R}^n)$  telle que  $h(a) = h(b) = 0$ , alors  $w$  est identiquement nulle. □

### 3.1.1 Exemple : L'action classique d'une particule massive sur une variété riemannienne.

L'action lagrangienne (action classique) associée à une particule de masse  $m$  en mouvement sur une variété riemannienne  $(M, g)$  en présence d'un potentiel  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  durant un intervalle de temps  $a \leq t \leq b$  est l'intégrale

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b \left( \frac{m}{2} \|\dot{\gamma}(t)\|^2 - u(\gamma(t)) \right) dt$$

où  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  est la trajectoire de la particule.

Le *principe de moindre action* de la mécanique analytique affirme que la trajectoire physiquement réalisée par une particule est une extrémale de cette action. Voyons quelles équations sont décrites par ce principe.

L'action  $\mathcal{L}$  est associée au Lagrangien

$$f(x, y) = \frac{m}{2} \|v\|^2 - u(x) = \frac{m}{2} (g_{ij}(x)v^i v^j) - u(x).$$

On a

$$\frac{\partial f}{\partial v^\mu} = \frac{m}{2} \frac{\partial}{\partial v^\mu} (g_{ij}(x)v^i v^j) = \frac{m}{2} (g_{i\mu}v^i + g_{\mu j}v^j) = mg_{i\mu}v^i,$$

et donc

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial v^\mu} \right) = m \left( g_{i\mu} \frac{dv^i}{dt} + \frac{\partial g_{i\mu}}{\partial x^j} \frac{dx^j}{dt} v^i \right).$$

Mais on a  $v^j = \dot{x}^j$  et  $\frac{dv^i}{dt} = \ddot{x}^i$ , par conséquent

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial v^\mu} \right) = m \left( g_{i\mu} \ddot{x}^i + \frac{\partial g_{i\mu}}{\partial x^j} \dot{x}^i \dot{x}^j \right).$$

D'autre part, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x^\mu} = \frac{m}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\mu} v^i v^j - \frac{\partial u}{\partial x^\mu} = \frac{m}{2} \partial_\mu g_{ij} \cdot \dot{x}^i \dot{x}^i - \partial_\mu u.$$

Les équations d'Euler-Lagrange entraînent alors

$$\frac{m}{2} \partial_\mu g_{ij} \cdot \dot{x}^i \dot{x}^i - \partial_\mu u = m (g_{i\mu} \ddot{x}^i + \partial_j g_{i\mu} \cdot \dot{x}^i \dot{x}^j),$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$m \left[ g_{i\mu} \ddot{x}^i + \frac{1}{2} (\partial_j g_{i\mu} + \partial_i g_{j\mu} - \partial_\mu g_{ij}) \dot{x}^i \dot{x}^j \right] = -\partial_\mu u$$

où on a utilisé la symétrie

$$\partial_j g_{i\mu} \dot{x}^i \dot{x}^j = \partial_i g_{j\mu} \dot{x}^i \dot{x}^j.$$

On note

$$\Gamma_{ij\mu}(x) = \frac{1}{2} (\partial_j g_{i\mu} + \partial_i g_{j\mu} - \partial_\mu g_{ij}),$$

ce sont les *symboles de Christoffel de première espèce*. En multipliant l'équation ci-dessus par les coefficients  $g^{k\mu}$  de la matrice inverse de  $g_{ij}$  et en utilisant  $g^{k\mu}g_{\mu i} = \delta_i^k$ , on obtient les relations

$$m \left( \ddot{x}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{x}^i \dot{x}^j \right) = -g^{k\mu} \partial_\mu u, \quad (1 \leq k \leq n) \quad (3.1.2)$$

où les coefficients  $\Gamma_{ij}^\mu$  sont les *symboles de Christoffel de deuxième espèce* définis par

$$\Gamma_{ij}^k(x) = \sum_{\mu=1}^n \frac{1}{2} g^{k\mu} (\partial_j g_{i\mu} + \partial_i g_{j\mu} - \partial_\mu g_{ij}), \quad (3.1.3)$$

Les équations (3.1.2) sont donc les équations du mouvement d'une particule de masse  $m$  se déplaçant dans un champ de force dérivant du potentiel  $u$ .

Le terme de gauche de cette équation s'appelle l'*accélération covariante* de la courbe  $\gamma$ . Quant au terme de droite, il correspond au gradient de la fonction  $u$ . Plus précisément on a la définition suivante :

**Définition 3.1.2** Le gradient d'une fonction  $u \in C^1(M)$  sur la variété riemannienne  $(M, g)$  est le champ de vecteurs noté  $\text{grad } u$  et défini par

$$g(\text{grad } u, X) = du(X)$$

pour tout  $X \in \Gamma(M)$ .

Cherchons l'expression de  $\text{grad } u$  en coordonnées locales. Posons  $\text{grad } u = a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ , alors par définition on doit avoir

$$\frac{\partial u}{\partial x^j} = du \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = g \left( a^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = a^i g_{ij},$$

et donc

$$a^k = a^i \delta_i^k = a^i g_{im} g^{mk} = g^{km} \frac{\partial u}{\partial x^m},$$

c'est à dire

$$\text{grad } u = g^{km} \frac{\partial u}{\partial x^m} \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Ainsi l'équation (3.1.2) n'est autre que l'égalité

$$\text{masse} \times \text{accélération covariante} = - \text{gradient du potentiel}.$$

**Définition.** Une *géodésique* de la variété riemannienne  $(M, g)$  est une courbe de classe  $C^2$  dont l'accélération covariante est nulle. Dans un système de coordonnées  $x^1, \dots, x^n$ , les géodésiques sont donc solutions du système d'équations différentielles donné par

$$\left( \ddot{x}^k + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k \dot{x}^i \dot{x}^j \right) = 0, \quad (1 \leq k \leq n). \quad (3.1.4)$$

D'un point de vue mécanique, les géodésiques sont les trajectoires dans  $M$  des *particules libres*, c'est-à-dire lorsque le potentiel  $u$  est nul, ce sont donc les courbes extrémales pour le Lagrangien  $f(x, v) = \|v\|^2 = g(v, v)$ .

## 3.2 Connexions

Nous avons vu dans paragraphe précédent le concept d'accélération covariante pour une courbe dans le domaine d'un système de coordonnées. Dans ce paragraphe nous introduisons les concepts de *connexion* qui nous permettra notamment d'étudier les géodésiques de façon intrinsèque, c'est à dire indépendamment d'un système de coordonnées et *globalement* sur une variété riemannienne.

**Définition 3.2.1** Une connexion sur une variété différentiable  $M$  est une application

$$\nabla : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \rightarrow \Gamma(M),$$

que l'on note  $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$  et qui vérifie les conditions suivantes :

(i)  $\nabla$  est  $C^\infty(M)$  linéaire en la première variable :

$$\nabla_{f_1 X_1 + f_2 X_2} Y = f_1 \nabla_{X_1} Y + f_2 \nabla_{X_2} Y \quad (\text{pour tous } f_1, f_2 \in C^\infty(M)).$$

(ii)  $\nabla$  est  $\mathbb{R}$ -linéaire en la seconde variable :

$$\nabla_X (a_1 Y_1 + a_2 Y_2) = a_1 \nabla_X Y_1 + a_2 \nabla_X Y_2 \quad (\text{pour tous } a_1, a_2 \in \mathbb{R}).$$

(iii)  $\nabla$  vérifie la règle de Leibniz suivante en la seconde variable :

$$\nabla_X (f \cdot Y) = f \cdot \nabla_X Y + X(f) \cdot Y \quad (\text{pour tout } f \in C^\infty(M)).$$

**Lemme 3.2.2** Toute connexion est un opérateur local: Si  $\nabla$  est une connexion sur la variété  $M$  et si  $X_1, X_2 \in \Gamma(M)$  coïncident sur un ouvert  $W \subset M$  ainsi que  $Y_1, Y_2 \in \Gamma(M)$ , alors

$$\nabla_{X_1} Y_1 = \nabla_{X_2} Y_2$$

en tout point de  $W$ .

**Preuve.** Pour tout point  $p \in W$  on peut trouver une fonction  $f \in C^\infty(M)$  à support compact contenu dans  $W$  et telle que  $f = 1$  dans un voisinage de  $p$ . Observons que

$$\nabla_{f \cdot X_1} (f \cdot Y_1) = f \cdot \nabla_{X_1} (f \cdot Y_1) = f \cdot (X_1(f)Y + f \cdot \nabla_{X_1} Y_1).$$

Or au point  $p$  nous avons  $f(p) = 1$  et  $X_1(f)(p) = 0$ , donc

$$(\nabla_{f \cdot X_1} (f \cdot Y_1))_p = (\nabla_{X_1} Y_1)_p.$$

Le même calcul s'applique à  $\nabla_{X_2} Y_2$ , par conséquent

$$(\nabla_{X_2} Y_2)_p = (\nabla_{f \cdot X_2} (f \cdot Y_2))_p = (\nabla_{f \cdot X_1} (f \cdot Y_1))_p = (\nabla_{X_1} Y_1)_p.$$

car  $f \cdot X_1 = f \cdot X_2$  et  $f \cdot Y_1 = f \cdot Y_2$  par hypothèse.

□

**Corollaire 3.2.3** *On peut restreindre une connexion à un ouvert: si  $\nabla$  est une connexion sur la variété  $M$  et  $U$  est un ouvert de  $M$ , alors  $\nabla$  définit une connexion sur  $U$ .*

**Preuve.** Pour  $X, Y \in \Gamma(U)$  et  $p \in U$  on doit définir  $(\nabla_X Y)_p$ . Donnons-nous un voisinage relativement compact  $W$  de  $p$  dont l'adhérence est contenue dans  $U$ . Donnons-nous aussi une fonction  $f \in C^\infty(M)$  telle que  $f = 1$  dans un voisinage de  $p$  et définissons des champs de vecteurs  $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \Gamma(M)$  par

$$\tilde{X}_q = \begin{cases} f(q) \cdot X_q & \text{si } q \in U, \\ 0 & \text{si } q \notin U \end{cases}$$

et de même pour  $\tilde{Y}$ . On définit ensuite

$$(\nabla_X Y)_p := \left( \nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y} \right)_p.$$

Le lemme précédent nous dit que cette définition est indépendante de la fonction  $f$ . □

**Lemme 3.2.4** *Si  $\nabla^1$  et  $\nabla^2$  sont deux connexions sur une variété différentiable  $M$  et si  $h_1, h_2 \in C^\infty(M)$ , alors  $\nabla = h_1 \nabla^1 + h_2 \nabla^2$  est une connexion si et seulement si  $h_1(x) + h_2(x) = 1$  pour tout  $x \in M$ .*

Nous laissons la preuve de ce lemme en exercice.

**Définition 3.2.5** *Soit  $\nabla$  une connexion sur la variété  $M$  et  $x^1, \dots, x^n$  un système de coordonnées sur  $U$ . Alors on appelle coefficients de la connexion ou symboles de Christoffel (de deuxième espèce) de la connexion  $\nabla$  les  $n^3$  fonctions  $\Gamma_{ij}^k(x)$  définies sur le domaine  $U$  par*

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \Gamma_{ij}^k \cdot \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Observer que les symboles de Christoffel dépendent de la connexion  $\nabla$  et du système de coordonnées choisi.

**Lemme 3.2.6** *Les symboles de Christoffel déterminent la connexion sur tous les champs de vecteurs. Plus précisément, si  $X = a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  et  $Y = b^j \frac{\partial}{\partial x^j}$  sont deux champs de vecteurs sur un domaine  $U$  de coordonnées  $(x^i)$ , alors*

$$\nabla_X(Y) = \left( a^i \frac{\partial b^k}{\partial x^i} + a^i b^j \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad (3.2.1)$$

**Preuve.** C'est un calcul :

$$\begin{aligned} \nabla_X(Y) &= \nabla_{a^i \frac{\partial}{\partial x^i}} \left( b^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = a^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left( b^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\ &= a^i \frac{\partial b^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + a^i b^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\ &= a^i \frac{\partial b^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + a^i b^j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \\ &= \left( a^i \frac{\partial b^k}{\partial x^i} + a^i b^j \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial x^k}. \end{aligned}$$

□

**Corollaire 3.2.7** *La valeur du champ  $\nabla_X(Y)$  en un point  $p \in M$  ne dépend que de la valeur de  $X$  en  $p$  et des valeurs de  $Y$  le long d'une courbe arbitraire  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  telle que  $\gamma(0) = 0$  et  $\dot{\gamma}(0) = X_p$ .*

**Preuve.** Dans un système de coordonnées au voisinage de  $p$ , on peut écrire  $X = a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  et  $Y = b^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ . On a alors  $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} b^k(\gamma(t)) = \sum_i a^i(p) \frac{\partial b^k}{\partial x^i}(p)$  et le lemme précédent montre que

$$\begin{aligned} (\nabla_X(Y))_p &= \left( \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} b^k(\gamma(t)) \right) \frac{\partial}{\partial x^k} + a^i(p) b^j(p) \Gamma_{ij}^k(p) \frac{\partial}{\partial x^k} \\ &= \left( \dot{b}^k + a^i(p) b^j(p) \Gamma_{ij}^k(p) \right) \frac{\partial}{\partial x^k}. \end{aligned}$$

□

**Proposition 3.2.8** *Si  $\nabla$  et  $\nabla'$  sont deux connexions sur la variété  $M$ , alors l'application  $A : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \rightarrow C^\infty(M)$  définit par*

$$A(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla'_X Y$$

*est un champ de tenseurs. Réciproquement, si  $\nabla$  est une connexion et  $A \in \text{Tens}_2^1(M)$ , alors*

$$\nabla'_X Y = \nabla_X Y + A(X, Y)$$

*est une connexion.*

**Preuve.** Montrons la première affirmation. Il faut vérifier que  $A$  est  $C^\infty(M)$ -bilinéaire. Il est clair que  $A$  est  $\mathbb{R}$ -bilinéaire, il suffit donc de vérifier que

$$A(fX, Y) = A(X, fY) = f \cdot A(X, Y)$$

pour tout  $f \in C^\infty(M)$  et tous  $X, Y \in \Gamma(M)$ . On a en effet :

$$A(fX, Y) = \nabla_{fX} Y - \nabla'_{fX} Y = f \nabla_X Y - f \nabla'_X Y = f A(X, Y),$$

et

$$\begin{aligned} A(X, fY) &= \nabla_X(fY) - \nabla'_X(fY) \\ &= (X(f)Y + f \nabla_X Y) - (X(f)Y + f \nabla'_X Y) \\ &= f(\nabla_X Y - \nabla'_X Y) \\ &= f A(X, Y). \end{aligned}$$

Le preuve de la seconde affirmation repose sur le même calcul, nous laissons les détails au lecteur. □

**Proposition 3.2.9** Si  $\nabla$  est une connexion sur la variété  $M$ , alors l'application  $T : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \rightarrow C^\infty(M)$  définie par

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \quad (3.2.2)$$

est un champ de tenseurs.

**Preuve.** Exercice.

**Définition 3.2.10** Le tenseur  $T \in \text{Tens}_2^1(M)$  défini par (3.2.2) s'appelle la torsion de la connexion  $\nabla$ . La connexion est dite symétrique ou sans torsion si  $T = 0$ .

On vérifie facilement que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a)  $T(X, Y) = 0$  pour tous  $X, Y \in \Gamma(M)$
- (b)  $\nabla_Y X = \nabla_X Y - [X, Y]$  pour tous  $X, Y \in \Gamma(M)$
- (c)  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$  dans tout système de coordonnées
- (d)  $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \nabla_{\partial_j} \partial_i$  dans tout système de coordonnées.

### 3.2.1 La connexion de Levi-Civita

Le résultat suivant s'appelle parfois le *Lemme fondamental de la géométrie riemannienne*

**Théorème 3.2.11** Sur toute variété riemannienne  $(M, g)$  il existe une unique connexion  $\nabla$  telle que

- (i)  $\nabla$  est symétrique, i.e.  $\nabla_Y X = \nabla_X Y - [X, Y]$ .
- (ii)  $\nabla$  est compatible avec la métrique :

$$Z(g(X, Y)) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y) \quad (3.2.3)$$

pour tous  $X, Y, Z \in \Gamma(M)$ .

**Définition 3.2.12** La connexion  $\nabla$  obtenue s'appelle la connexion de Levi-Civita. On l'appelle aussi la connexion riemannienne ou la connexion canonique de  $(M, g)$ .

Avant de démontrer le théorème, remarquons que la condition de compatibilité de la connexion  $\nabla$  avec la métrique s'exprime en coordonnées par l'identité de Ricci :

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = \Gamma_{ij}^m g_{mk} + \Gamma_{ik}^m g_{jm}. \quad (3.2.4)$$

On a en effet  $\partial_i g_{jk} = g(\nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_k) + g(\partial_j, \nabla_{\partial_i} \partial_k) = \Gamma_{ij}^m g_{mk} + \Gamma_{ik}^m g_{jm}$ .

**Preuve.** Nous démontrons d'abord l'unicité. Par l'identité de Ricci on a

$$\partial_i g_{jk} = \Gamma_{ij}^m g_{mk} + \Gamma_{ik}^m g_{jm}, \quad (a)$$

$$\partial_j g_{ik} = \Gamma_{ji}^m g_{mk} + \Gamma_{jk}^m g_{im} \quad (b)$$

et

$$\partial_k g_{ij} = \Gamma_{ki}^m g_{mj} + \Gamma_{kj}^m g_{im} \quad (c)$$

On somme (a) + (b) - (c) : cela nous donne, après simplifications en utilisant les symétries  $g_{ij} = g_{ji}$  et  $\Gamma_{ij}^m = \Gamma_{ji}^m$ , la formule suivante :

$$2g_{mk}\Gamma_{ij}^m = (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}) \quad (3.2.5)$$

En multipliant cette identité par  $g^{lk}$  et en sommant sur  $k$ , on obtient

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} g^{lk} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}). \quad (3.2.6)$$

Cette identité prouve que les symboles de Christoffel (et donc la connexion  $\nabla$ ) sont uniquement déterminés par le tenseur métrique et ses premières dérivées.

Pour prouver l'existence, on *définit* la connexion  $\nabla$  dans le domaine de chaque carte par les symboles de Christoffel donnés en (3.2.6). On a clairement  $\Gamma_{ij}^l = \Gamma_{ji}^l$  donc la connexion est symétrique. D'autre part (3.2.5), qui est équivalente à (3.2.6), entraîne que

$$\partial_i g_{jk} = \Gamma_{ij}^m g_{mk} + \Gamma_{ik}^m g_{jm}.$$

Or cette identité signifie que la connexion  $\nabla$  est compatible avec la métrique  $g$ . On a ainsi construit une connexion symétrique et compatible avec la métrique dans chaque domaine de carte. L'unicité d'une telle connexion, que nous venons de démontrer, entraîne l'indépendance de  $\nabla$  par rapport au système de coordonnées-

□

**Une autre preuve.** Voici une preuve intrinsèque du théorème (i.e. une preuve qui ne se base pas sur une écriture en coordonnées). Nous démontrons de nouveau d'abord l'unicité. On écrit pour simplifier  $g(X, Y) = \langle X, Y \rangle$ , alors les conditions (i) et (ii) entraînent que

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z \rangle &\stackrel{(a)}{=} \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \\ Y\langle X, Z \rangle &= \langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle X, \nabla_Y Z \rangle \\ &\stackrel{(b)}{=} (\langle \nabla_X Y, Z \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle) + \langle X, \nabla_Y Z \rangle, \\ Z\langle X, Y \rangle &= \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle \\ &\stackrel{(c)}{=} (\langle \nabla_X Z, Y \rangle - \langle [X, Z], Y \rangle) + (\langle X, \nabla_Y Z \rangle - \langle X, [Y, Z] \rangle). \end{aligned}$$

En additionnant les égalités (a) et (b), puis en soustrayant (c), on obtient l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_X Y, Z \rangle &= X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle \\ &\quad + \langle [X, Y], Z \rangle - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle. \end{aligned} \quad (3.2.7)$$



Cette égalité s'appelle la *Formule de Koszul*.

Pour  $X, Y \in \Gamma(M)$ , le champ de vecteurs  $\nabla_X Y$  est l'unique champ vérifiant l'égalité de Koszul pour tout  $Z \in \Gamma(M)$ . Cela prouve l'unicité de la connexion  $\nabla$ .

Pour prouver l'existence, on *définit*  $\nabla_X Y$  par la formule de Koszul (pour tout  $Z$ ). Il est facile (bien qu'un peu long) de vérifier que l'application  $(X, Y) \rightarrow \nabla_X Y$  est une connexion et qu'elle est sans torsion.

Finalement, pour vérifier que  $\nabla$  est compatible avec la métrique, on observe que la formule de Koszul entraîne

$$\langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle = X \langle Y, Z \rangle.$$

□

**Remarque.** Les deux preuves ne sont pas fondamentalement différentes, et la formule de Koszul permet de retrouver les symboles de Christoffel. En effet, si on pose  $X = \frac{\partial}{\partial x^i} = \partial_i$ ,  $Y = \partial_j$  et  $Z = \partial_k$  on a  $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j) = \langle \partial_i, \partial_j \rangle$ , et donc

$$\langle \nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_k \rangle = \langle \Gamma_{ij}^m \partial_m, \partial_k \rangle = g_{km} \Gamma_{ij}^m.$$

La formule de Koszul nous donne alors

$$2\langle \nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_k \rangle = \partial_i \langle \partial_j, \partial_k \rangle + \partial_j \langle \partial_i, \partial_k \rangle - \partial_k \langle \partial_i, \partial_j \rangle = \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}.$$

Par conséquent :

$$g_{km} \Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}).$$

### 3.3 Digression sur les systèmes d'équations différentielles ordinaires

Soit  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . On considère le *problème de Cauchy* suivant:

$$(*) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} &= F(t, u), \\ u(0) &= u_0. \end{cases}$$

où  $F : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction,  $I \subset \mathbb{R}$  est un intervalle ouvert contenant 0 et  $u_0 \in U$ . On appelle *solution locale* du problème (\*) la donnée d'une application dérivable :  $u : J \rightarrow U$  définie sur un sous-intervalle  $J \subset I$  contenant 0 telle que  $u(0) = u_0$  et  $\frac{du}{dt} = F(t, u(t))$  pour tout  $t \in J$ .

On a alors le résultat d'existence, d'unicité et de dépendance différentiable par rapport aux conditions initiales suivant qui se démontre dans les cours sur les équations différentielles ordinaires.

**Théorème 3.3.1** *Pour toute fonction  $F : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^\infty$  il existe une fonction  $\varphi : \mathcal{D} \rightarrow U$  où  $\mathcal{D} \subset I \times U$  est un ouvert contenant  $\{0\} \times U$  telle que  $\varphi \in C^\infty$  et telle que pour tout  $u_0 \in U$  la courbe  $t \rightarrow \varphi(t, u_0) = u(t)$  est une solution de (\*). On a donc*

$$\varphi(0, u_0) = u_0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi(t, u_0)}{\partial t} = F(t, \varphi(t, u_0)).$$

De plus on a unicité dans le sens suivant: toute solution  $u : J \rightarrow U$  du problème (\*) est une restriction de  $\varphi$ , i.e.  $J \times \{u(0)\} \subset \mathcal{D}$  et  $u(t) = \varphi(t, u(0))$  pour tout  $t \in J$ .

Le système (\*) est dit *linéaire* si la fonction  $F$  est linéaire en  $u$ . i.e.  $F(t, \lambda u + v) = \lambda F(t, u) + F(t, v)$ , dans ce cas on peut écrire

$$\frac{du}{dt} = A(t) \cdot u$$

où  $A(t) \in M_n(\mathbb{R})$ . Pour les systèmes linéaires, les solutions se prolongent à tout l'intervalle de définition de l'équation.

**Théorème 3.3.2** Si  $A : I \rightarrow M_n(\mathbb{R})$  est continue, alors il existe  $\varphi : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dérivable telle que  $\varphi(0, u_0) = u_0$  pour tout  $u_0 \in \mathbb{R}^n$  et

$$\frac{\partial \varphi(t, u_0)}{\partial t} = A(t) \cdot u(t)$$

pour tout  $t \in I$ .

Lorsque  $A \in M_n(\mathbb{R})$  est constante, la solution est donnée par l'exponentielle matricielle :

$$\varphi(t, u) = e^{tA} \cdot u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k u.$$

**Remarque.** Dans le cas non linéaire, les solutions ne se prolongent pas toujours à l'entier de l'intervalle de définition de l'équation. Un exemple simple (et important) est donné par l'équation de Riccati (sur  $\mathbb{R}$ ) qui est l'équation différentielle

$$\frac{du}{dt} = u^2.$$

On vérifie facilement que la solution de cette équation vérifiant la condition initiale  $u(0) = u_0$  est  $u(t) = \frac{u_0}{1 - tu_0}$ . Cette solution existe pour  $t < \frac{1}{u_0}$  (pour  $u_0 > 0$ ) et pour  $t > \frac{1}{u_0}$  (pour  $u_0 < 0$ ). Dans tous les cas il y a "explosion en temps fini" lorsque  $u_0 \neq 0$ .

### 3.4 Dérivée covariante et transport parallèle

**Définition.** Soit  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  un chemin de classe  $C^\infty$  dans la variété différentiable  $M$ . On appelle *champs de vecteurs le long de  $\gamma$*  une application  $X : [a, b] \rightarrow TM$  de classe  $C^\infty$  telle que  $X_t \in T_{\gamma(t)}M$  pour tout  $t \in [a, b]$  (de façon équivalente,  $\pi \circ X = \gamma$  où  $\pi : TM \rightarrow M$  est la projection canonique). On note  $\Gamma_\gamma$  l'ensemble des champs de vecteurs le long de  $\gamma$ .

**Remarque.**  $\Gamma_\gamma$  est un module sur l'algèbre  $C^\infty([a, b])$ : Si  $X, Y \in \Gamma_\gamma$  et  $f, h \in C^\infty([a, b])$ , alors  $fX + hY \in \Gamma_\gamma$  est un nouveau champ de vecteurs le long de  $\gamma$ .

**Proposition 3.4.1** Soit  $M$  une variété différentiable munie d'une connexion  $\nabla$  et soit  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  une courbe  $C^\infty$  dans  $M$ . Si  $Y \in \Gamma_\gamma$ , alors  $\nabla_{\dot{\gamma}(t)}Y$  est bien défini pour tout  $t \in [a, b]$ . De plus  $t \mapsto \nabla_{\dot{\gamma}(t)}Y$  est aussi un élément de  $\Gamma_\gamma$ .

**Définition.** Ce champ de vecteurs est la *dérivée covariante* de  $Y$  le long de  $\gamma$ . On note simplement  $\nabla_t Y = \nabla_{\dot{\gamma}(t)} Y$ . (D'autres notations classiques sont  $\frac{\nabla}{dt} Y$  ou  $\frac{D}{dt} Y$ ).

**Preuve.** C'est essentiellement une reformulation du corollaire 3.2.7. Soit  $x^1, \dots, x^n$  un système de coordonnées au voisinage de  $\gamma(t)$ . On peut écrire (localement)  $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$  et  $Y_t = b^j(t) \frac{\partial}{\partial x^j}$ . Pour définir  $\nabla_{\dot{\gamma}(t)} Y$  on doit à priori étendre  $\dot{\gamma}(t)$  et  $Y$  en des champs de vecteurs sur la variété, mais le calcul suivant montre que la dérivée covariante de  $Y$  ne dépend pas de l'extension :

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot{\gamma}(t)} Y &= \nabla_{\left(\dot{x}^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right)} \left( b^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\ &= \frac{db^k}{dt} \frac{\partial}{\partial x^k} + \dot{x}^i(t) b^j(t) \Gamma_{ij}^k(t) \frac{\partial}{\partial x^k} \\ &= \left( \dot{b}^k(t) + \dot{x}^i(t) b^j(t) \Gamma_{ij}^k(t) \right) \frac{\partial}{\partial x^k}. \end{aligned}$$

□

**Remarque.** Observons qu'on peut aussi écrire la dérivée covariante de la façon suivante:

$$\nabla_t Y = \frac{d}{dt} Y_t + \dot{x}^i(t) b^j(t) \Gamma_{ij}^k(t) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Les propriétés des connexions entraînent immédiatement le lemme suivant :

**Lemme 3.4.2** *La dérivée covariante  $\nabla_t : \Gamma_\gamma \rightarrow \Gamma_\gamma$  vérifie les propriétés suivantes :*

a.)  $\nabla_t(Y_1 + Y_2) = \nabla_t(Y_1) + \nabla_t(Y_2)$ .

b.)  $\nabla_t(fY) = \frac{df}{dt} \cdot Y + f \nabla_t Y$ .

*En particulier  $\nabla_t$  est  $\mathbb{R}$ -linéaire. De plus, si  $\nabla$  est la connexion de Levi-Civita d'une métrique Riemannienne  $g$ , alors*

c.)  $\frac{d}{dt} g(Y_1, Y_2) = g(\nabla_t Y_1, Y_2) + g(Y_1, \nabla_t Y_2)$ .

**Définition.** Un champ de vecteurs  $X \in \Gamma_\gamma$  le long de  $\gamma$  est *parallèle* si  $\nabla_t X \equiv 0$ .

On a alors le résultat suivant :

**Théorème 3.4.3** *Soit  $M$  une variété différentiable munie d'une connexion  $\nabla$  et soit  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  une courbe  $C^\infty$  dans  $M$ . Pour tout  $\xi \in T_p M$  ( $p = \gamma(a)$ ) il existe un unique champ parallèle  $X \in \Gamma_\gamma$  tel que  $X_a = \xi$*

**Définition.** On note ce champs  $X_t = P_t \xi$  (ou  $P_t^\gamma \xi$ ) et on l'appelle le *transport parallèle* de  $\xi$  le long de  $\gamma$  relativement à la connexion  $\nabla$ . Remarquons que si  $\gamma$  relie  $p = \gamma(a)$  à  $q = \gamma(b)$ , alors  $P_b$  est une application linéaire de  $T_p M$  vers  $T_q M$ .

**Preuve.** On suppose d'abord que  $\gamma([a, b])$  est contenu dans le domaine  $U \subset M$  d'un système de coordonnées  $x^1, \dots, x^n$ . Notons  $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$  et  $\xi = \xi_i \frac{\partial}{\partial x^i} \in T_p M$  ( $p = \gamma(a)$ ). Définissons  $a^k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  par les conditions

$$\begin{cases} \frac{da^k}{dt} &= - \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) \dot{x}^i(t) a^j(t), \\ a^k(a) &= \xi^k. \end{cases}$$

C'est un système d'équations différentielle ordinaire linéaires à coefficients  $C^\infty$ , il existe donc une unique solution  $t \mapsto (a^1(t), \dots, a^n(t))$  qui est  $C^\infty$  et définie sur tout l'intervalle  $a \leq t \leq b$ . Le champ

$$X = \sum_k a^k(t) \frac{\partial}{\partial x^k}$$

a les propriétés voulues. Supposons maintenant que plusieurs domaines de cartes  $U_1, \dots, U_s \subset M$  recouvrent le chemin  $\gamma$  (on peut supposer ce nombre fini par compacité de l'intervalle  $[a, b]$ ). Quitte à renuméroter ces domaines, on peut supposer qu'il existe une subdivision  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_s = b$  telle que  $\gamma([t_r, t_{r+1}]) \subset U_r$  pour tout  $r$ . On définit alors inductivement le champ  $X \in \Gamma_{\gamma_r}$  où  $\gamma_r = \gamma|_{[t_r, t_{r+1}]}$  pour chaque  $r$ . Le recollement ne pose pas de problème en raison de l'unicité de la solution du système différentiel. □

Examinons le transport parallèle selon un autre point de vue (qui nous donnera une autre preuve du théorème précédent). Si  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  est un chemin  $C^\infty$ , alors le transport parallèle définit une application

$$P^\gamma : T_p M \rightarrow \Gamma_\gamma,$$

(où  $p = \gamma(a)$ ) et qui vérifie les propriétés suivantes, en notant  $P_t \xi \in T_{\gamma(t)} M$  la valeur de  $P^\gamma \xi$  en  $t$  :

- i.)  $P_0 \xi = \xi$  (i.e.  $P_0 : T_p M \rightarrow T_p M$  est l'identité).
- ii.)  $\nabla_t (P_t \xi) = 0$ .
- iii.)  $P^\gamma$  est  $\mathbb{R}$ -linéaire.

Pour démontrer l'existence et l'unicité de  $P^\gamma$ , on se donne  $n$  champs de vecteurs  $Z_1, \dots, Z_n \in \Gamma_\gamma$  tels que pour tout  $t \in [a, b]$ , les vecteurs  $Z_1|_t, \dots, Z_n|_t$  forment une base de  $T_{\gamma(t)} M$  (on dit alors que  $Z_1, \dots, Z_n$  est un *repère mobile le long de  $\gamma$* . L'existence d'un tel repère mobile est facile à démontrer).

On définit alors la matrice  $D(t) = (d_i^j(t))$  de la dérivée covariante  $\nabla$  dans le repère mobile  $Z_1, \dots, Z_n$  par

$$\nabla_t Z_i = d_i^j(t) Z_j,$$

La condition  $\nabla_t (P_t Z_i) = 0$  s'écrit

$$0 = \nabla_t (P_t Z_i) = \nabla_t (p_i^k(t) Z_k) = \dot{p}_i^k(t) Z_k + p_i^k(t) \nabla_t Z_k = \dot{p}_i^k(t) Z_k + p_i^k(t) d_k^j(t) Z_j,$$

c'est à dire

$$\dot{p}_i^j(t) = - \sum_{k=1}^n d_k^j(t) p_i^k(t) \quad (3.4.1)$$

Cette équation peut s'écrire matriciellement :

$$\dot{P} = -DP.$$

Le théorème sur les équations différentielles ordinaires nous dit qu'il existe une unique solution  $t \mapsto P_t = (p_i^k(t))$ , définie pour tout  $t$  (car ce système est linéaire) vérifiant la condition initiale.

$$P_a = I \quad (\text{i.e. } p_i^k(a) = \delta_i^k).$$

Le transport parallèle d'un vecteur  $\xi = \xi^i Z_i(a) \in T_p M$  est alors donné par

$$X_t = P_t \xi = (p_i^j(t) \xi^i) Z_j(t).$$

On a en effet clairement  $X_a = \xi$  et les calculs précédents impliquent que  $\nabla_t X_t = 0$ .

□

### 3.5 La formule de variation première pour la longueur

Rappelons que si  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  est une courbe différentiable dans la variété riemannienne  $(M, g)$ , alors sa longueur est  $\ell(\gamma) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\| dt$ . La *distance*  $d(p, q)$  entre deux points  $p$  et  $q$  de  $M$  est l'infimum des longueurs de toutes les courbes lisses reliant ces deux points. Ceci définit une métrique sur  $M$  et la topologie associée à cette métrique coïncide avec la topologie de variété de  $M$ .

**Définition.** Une *variation* d'une courbe lisse  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  est une application différentiable  $\varphi : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  telle que  $\varphi(t, 0) = \gamma(t)$  pour tout  $t \in (a, b)$ . Si  $\varphi$  est une variation de  $\gamma$ , on note  $\varphi_s$  la courbe  $\varphi_s(t) = \varphi(t, s)$  et  $\ell(\varphi_s)$  sa longueur.

Observons que pour tout  $(t, s) \in [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon)$  on a deux vecteurs tangents en  $\varphi(t, s)$  définis par

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \varphi_* \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial s} = \varphi_* \left( \frac{\partial}{\partial s} \right).$$

Le premier vecteur est le vecteur vitesse de  $\varphi_s$  et le second vecteur mesure la variation infinitésimale de  $\varphi_s$  selon le paramètre  $s$ .

**Lemme 3.5.1** On a  $\nabla_t \frac{\partial \varphi}{\partial s} = \nabla_s \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ , où  $\nabla$  est la connexion de Levi-Civita de  $(M, g)$ .

**Preuve.** En coordonnées locales, on a  $\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{\partial \varphi^k}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x^k}$  et  $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi^k}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x^k}$ .

Donc

$$\nabla_t \frac{\partial \varphi}{\partial s} = \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial s} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left( \frac{\partial^2 \varphi^k}{\partial t \partial s} + \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \varphi^i}{\partial s} \frac{\partial \varphi^j}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad (3.5.1)$$

cette expression est symétrique en  $t, s$  car  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ .

□

**Lemme 3.5.2** Si la courbe  $\gamma$  est non singulière, i.e.  $\dot{\gamma}$  ne s'annule pas, alors la fonction longueur  $s \rightarrow \ell(\varphi_s)$  est différentiable au voisinage de  $s = 0$  et on a

$$\frac{d}{ds} \ell(\varphi_s) = \int_a^b \frac{\langle \nabla_t \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \rangle}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\|} dt$$

**Preuve.** La longueur de  $\varphi_s$  est

$$\ell(\varphi_s) = \int_a^b \|\dot{\varphi}_s(t)\| dt = \int_a^b \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, s) \right\| dt.$$

L'intégrand est de classe  $C^1$  et on peut donc dériver sous le signe somme. On utilise alors le lemme précédent dans le calcul suivant, en observant que  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, s)$  ne s'annule pas pour  $s$  assez petit.

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \ell(\varphi_s) &= \int_a^b \frac{d}{ds} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\| dt = \int_a^b \frac{d}{ds} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\rangle^{1/2} dt \\ &= \int_a^b \frac{\langle \nabla_s \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \rangle}{\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \rangle^{1/2}} dt \\ &= \int_a^b \frac{\langle \nabla_t \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \rangle}{\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \rangle^{1/2}} dt \end{aligned}$$

□

**Théorème 3.5.3 (Formule de variation première)**

Soit  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  une courbe différentiable parcourue à vitesse constante (non nulle) dans une variété riemannienne  $(M, g)$ . Alors pour toute variation  $\varphi : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  de  $\gamma$  on a

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \ell(\varphi_s) = \frac{b-a}{\ell} \left\{ \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \dot{\gamma} \right\rangle \Big|_{t=a}^b - \int_a^b \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial s}(t, 0), \nabla_t \dot{\gamma}(t) \right\rangle dt \right\}$$

où  $\ell = \ell(\gamma) = \|\dot{\gamma}\|$  et  $\nabla$  est la connexion de Levi-Civita.

**Démonstration du théorème.** La vitesse de  $\gamma$  est supposée constante, ainsi

$$\ell = \ell(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \|\dot{\gamma}\|(b-a),$$

et donc  $\|\dot{\gamma}\| = \ell/(b-a)$ . Le lemme précédent nous dit alors que

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \ell(\varphi_s) = \frac{b-a}{\ell} \int_a^b \left\langle \nabla_t \frac{\partial \varphi}{\partial s}(t, 0), \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, 0) \right\rangle dt.$$

On conclut en intégrant par parties en utilisant l'identité

$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \nabla_t \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \nabla_t \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\rangle.$$

□

**Définition.** Une courbe  $\gamma$  de classe  $C^2$  telle que  $\nabla_t \dot{\gamma} = 0$  est appelée une *géodésique*. Puisque  $\frac{d}{dt} \|\dot{\gamma}\|^2 = 2\langle \nabla_t \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle$ , les géodésiques ont une vitesse constante. On a donc le

**Corollaire 3.5.4** Une courbe  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  de classe  $C^2$  est une géodésique si et seulement si elle est parcourue à vitesse constante et est un point critique pour la longueur  $\ell$ , i.e.

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \ell(\varphi_s) = 0$$

pour toute variation à extrémité fixée.

□

Une autre conséquence importante de la formule de variation première est le

**Corollaire 3.5.5** Soient  $(M, g)$  une variété riemannienne complète et  $N \subset M$  une sous-variété. Soit  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  une géodésique telle que  $\gamma(a) = p$ ,  $\gamma(b) \in N$  et la longueur  $\ell = \ell(\gamma)$  est minimale avec ces deux conditions. Alors

$$\dot{\gamma}(b) \perp T_{\gamma(b)}N.$$

**Preuve.** Soit  $X \in T_{\gamma(b)}N$ , on doit montrer que  $\dot{\gamma}(b) \perp X$ . Considérons une variation  $\varphi : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  de  $\gamma$  telle que  $\varphi(a, s) = p$  et  $\varphi(b, s) \in N$  pour tout  $s$  et  $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right|_{s=0}(b, 0) = X$ . Comme  $\nabla_t \dot{\gamma} \equiv 0$  et  $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{s=0}(a, 0) = 0$ , la formule de variation première entraîne que

$$0 = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \ell(\varphi_s) = \frac{b-a}{\ell} \left\langle \left. \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right|_{s=0}(b, 0), \dot{\gamma} \right\rangle = \langle X, \dot{\gamma} \rangle.$$

□

### 3.6 L'application exponentielle

Rappelons qu'une géodésique de la variété riemannienne  $(M, g)$  est une courbe  $\gamma : I \rightarrow M$  de classe  $C^2$  d'accélération covariante nulle :  $\nabla_t \dot{\gamma}(t) \equiv 0$ . Les géodésiques sont donc localement les solutions du système d'équations différentielles du second ordre

$$\ddot{x}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{x}^i \dot{x}^j = 0.$$

En appliquant le théorème 3.3.1 d'existence, d'unicité et de dépendance différentiable des solutions par rapport aux conditions initiales, nous obtenons le résultat suivant :

**Théorème 3.6.1** Il existe un ouvert maximal  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times TM$  contenant  $\{0\} \times TM$  tel que pour tout  $(p, v) \in T_p M$  il existe une unique géodésique  $\gamma_{p,v} : J_{p,v} \rightarrow M$  telle que

$$\gamma_{p,v}(0) = p \quad \text{et} \quad \dot{\gamma}_{p,v}(0) = v,$$

où  $J_{p,v}$  est l'intervalle  $J_{p,v} = \{t \in \mathbb{R} \mid (t, p, v) \in \mathcal{D}\}$ . De plus l'application  $(p, v) \rightarrow \gamma_{p,v}(t)$  est différentiable.

Ainsi  $\gamma_{p,v}(t)$  est l'unique géodésique maximale issue de  $p$  et de vecteur vitesse initial égal à  $v$ . Lorsque le point  $p$  est fixé, on note pour simplifier cette géodésique  $\gamma_v$ .

**Lemme 3.6.2** Pour tout  $0 \leq \lambda \leq 1$ , on a

$$\gamma_v(\lambda t) = \gamma_{\lambda v}(t).$$

**Preuve.** Notons  $\sigma(t) = \gamma_v(\lambda t)$ , alors  $\sigma$  est géodésique car  $\dot{\sigma}(t) = \lambda \dot{\gamma}_v(\lambda t)$ , donc  $\nabla_t \dot{\sigma}(t) = \lambda \nabla_t \dot{\gamma}_v(\lambda t) = 0$ . De plus on a clairement  $\sigma(0) = \gamma_v(0) = p$  et  $\dot{\sigma}(0) = \lambda \dot{\gamma}_v(0) = \lambda v$ . Donc  $\sigma$  est l'unique géodésique issue de  $p$  en direction de  $\lambda v$ . On conclut que  $\sigma(t) = \gamma_{\lambda v}(t)$ . □

**Corollaire 3.6.3** Pour tout point  $p$  d'une variété riemannienne  $(M, g)$  il existe un ouvert étoilé  $\Omega_p \subset T_p M$  contenant 0 et une application différentiable

$$\exp_p : \Omega_p \rightarrow M,$$

telle que pour tout  $v \in \Omega_p$ , la courbe  $\gamma_v : [0, 1] \rightarrow M$ , définie par  $\gamma_v(t) = \exp_p(tv)$ , est l'unique géodésique vérifiant les conditions initiales  $\gamma_v(0) = p$  and  $\dot{\gamma}_v(0) = v$ .

De plus Il existe un voisinage  $V_p$  de 0 dans  $T_p M$  tel que la restriction de  $\exp_p$  à ce voisinage est un difféomorphisme sur un voisinage de  $p$  dans  $M$ .

Cette application est appelée l'exponentielle riemannienne de  $(M, g)$  en  $p$ .

**Définition.** Le rayon d'injectivité  $\iota(p)$  d'un point  $p \in (M, g)$  est le suprémum des  $\varepsilon$  tels que  $\Omega_p \supset \{v \in T_p M : \|v\| < \varepsilon\}$  et la restriction de  $\exp_p$  à  $\{v \in T_p M : \|v\| < \varepsilon\}$  est un difféomorphisme sur son image.

Intuitivement,  $\Omega_p$  est le plus grand ouvert de  $T_p M$  tel que pour  $v \in T_p M$  la géodésique  $\gamma_v$  existe (au moins) pour  $0 \leq t \leq 1$  et l'exponentielle est alors définie par  $\exp_p(v) = \gamma_v(1)$ .

**Preuve.** Fixons un point  $p \in M$ . Par le théorème précédent, on sait qu'il existe  $\lambda > 0$  tel que  $[-\lambda, \lambda] \subset J_{p,v}$  pour tout  $v \in T_p M$ . Cela signifie que la géodésique  $\gamma_v$  est définie pour  $-\lambda \leq t \leq \lambda$ . Par le lemme, on voit que la géodésique  $\gamma_{\lambda v}$  est définie pour  $-1 \leq t \leq 1$ . Cet argument entraîne que pour tout  $p$ , l'ensemble des vecteurs  $v \in T_p M$  tels que  $1 \in J_{p,v}$  (i.e.  $(t, p, v) \in \mathcal{D}$ ) est un ouvert  $\Omega_p \subset T_p M$  contenant l'origine. Par le lemme, cet ouvert est étoilé (i.e.  $v \in \Omega_p \Rightarrow \lambda v \in \Omega_p$  pour tout  $0 \leq \lambda \leq 1$ ).

Calculons la différentielle de  $\exp_p$  en 0. Si on identifie  $T_0(T_p M)$  avec  $T_p M$ , alors nous avons

$$(d \exp_p)_0(w) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp_p(tw) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma_w(t) = w$$

par définition de la géodésique  $\gamma_w$ . On a donc prouvé que  $(d \exp_p)_0$  est l'identité de  $T_p M$ . Par le théorème d'inversion locale,  $\exp_p$  est donc un difféomorphisme local d'un voisinage de 0 dans  $T_p M$  vers un voisinage de  $p$  dans  $M$ . □

Une conséquence est que pour tout point  $p$  de la variété riemannienne  $(M, g)$  il existe un voisinage ouvert  $W_p \subset M$  et une application différentiable  $\Phi_p : W_p \rightarrow T_p M$  tel que  $\Phi_p(W_p) \subset \Omega_p$  et  $\exp_p \circ \Phi_p = \text{id}_{W_p}$ . Si on choisit maintenant une base orthogonale (pour le produit scalaire  $g_p$ ) de  $T_p M$ , alors  $(W_p, \Phi_p = \exp_p^{-1})$  définit un système de coordonnées sur  $W_p$ . On les appelle des coordonnées normales de Riemann centrées en  $p$ .



**Proposition 3.6.4** Si  $(x^1, \dots, x^n)$  est un système de coordonnées normales centrées au point  $p$ , alors dans ces coordonnées on a

$$g_{ij}(0) = \delta_{ij}, \quad \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \Gamma_{ij}^k(0) = 0.$$

**Preuve.** Observons d'abord que les coordonnées du point  $p$  sont  $x^i = 0$  car  $\exp_p(0) = p$ . On a donc  $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$  car ces coordonnées sont associées à une base orthonormée de  $T_p M$ . D'autre part la courbe décrite dans ce système de coordonnées par  $x^i(t) = ta^i$  est une géodésique pour tout  $(a^1, \dots, a^n) \in \mathbb{R}^n$ . Pour cette géodésique on a  $\dot{x}^i(t) = a^i$  et  $\ddot{x}^i(t) = 0$ . L'équation des géodésiques nous donne alors

$$\Gamma_{ij}^k(0)a^i a^j = 0$$

pour tout  $a = (a^1, \dots, a^n)$ , il s'ensuit que  $\Gamma_{ij}^k(0) = 0$  pour tous  $i, j, k$ . On obtient finalement le résultat sur les dérivées partielles d'ordre 1 des coefficients  $g_{ij}$  grâce à l'identité

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = \Gamma_{ij}^m g_{mk} + \Gamma_{ik}^m g_{jm}.$$

□

On interprète ce résultat en disant que la variété Riemannienne est *osculatrice* (i.e. "tangente à l'ordre 2") en tout point  $p \in M$  à son espace tangent  $T_p M$ .

On verra plus tard que en général les dérivées secondes  $\frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^m}(0)$  sont non nulles. Elles sont liées à la courbure de la variété riemannienne.

### 3.7 Le lemme de Gauss

Soit  $p$  un point de la variété riemannienne  $(M, g)$  et  $v$  un vecteur dans  $\Omega_p$  (le domaine de  $\exp_p$ ).

**Théorème 3.7.1 (Le lemme de Gauss)** On a les propriétés suivantes :

a.)  $\|d(\exp_p)_v(v)\| = \|v\|.$

b.) Si  $w \in T_v \Omega_p$  est orthogonal à  $v$ , alors  $d(\exp_p)_v(v)$  et  $d(\exp_p)_v(w)$  sont orthogonaux.

**Preuve.** (a) Notons  $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ , c'est la courbe géodésique telle que  $\gamma(0) = p$  et  $\dot{\gamma}(0) = v$ . En particulier  $\|\dot{\gamma}(t)\|$  est constante, par conséquent

$$\|d(\exp_p)_v(v)\| = \|\dot{\gamma}(1)\| = \|\dot{\gamma}\| = \|v\|.$$

(b) Pour prouver la seconde affirmation, observons d'abord que nous pouvons supposer sans perdre de généralité que  $\|v\| = \|w\|$ . Considérons le chemin  $\lambda(s) = \cos(s)v + \sin(s)w$  dans  $\Omega_p$  (bien défini pour  $s$  assez petit). Alors  $\varphi(t, s) = \exp_p(t\lambda(s))$  est une variation de  $\gamma$  par des

géodésiques de longueur constante égale à  $\ell = \|v\|$ . Par la formule de variation première, on a

$$0 = \frac{d}{ds}\ell(\varphi_s) = \frac{1}{\ell} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial s}(1, 0), \dot{\gamma}(1) \right\rangle.$$

Donc  $d(\exp_p)_v(w) = \frac{\partial \varphi}{\partial s}(1, 0)$  est orthogonal à  $\dot{\gamma}(1) = d(\exp_p)_v(v)$ .  $\square$

Géométriquement, le lemme de Gauss dit que l'exponentielle en  $p$  envoie les sphères de  $T_pM$  centrées en 0 et les rayons de  $T_pM$  sur des sous-ensembles orthogonaux de  $M$ .

### 3.8 Coordonnées polaires

Dans une variété riemannienne  $(M, g)$  on peut introduire un système de coordonnées polaires au voisinage de tout point  $p \in M$ . Le principe consiste à considérer des coordonnées polaires dans l'espace tangent  $T_pM$  et utiliser l'exponentielle pour transporter ces coordonnées sur la variété  $M$ . Décrivons d'abord ces coordonnées dans le cas des surfaces.

On suppose donc  $\dim(M) = 2$  et on choisit une base orthonormée  $e_1, e_2 \in T_pM$ . Soit  $\iota(p)$  le rayon d'injectivité de  $p$  et notons  $W_p = \exp_p(\{v \in T_pM \mid \|v\| < \iota(p)\})$ .

Pour  $0 < r < \iota(p)$  et  $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  on note  $q(r, \theta) \in W_p$  l'unique point de  $U_p$  tel que

$$q(r, \theta) = \exp_p(r \cos(\theta)e_1 + r \sin(\theta)e_2),$$

et on dit que  $(r, \theta)$  sont les *coordonnées polaires* de  $q \in W_p$  de pôle  $p$ . Observons que si  $x, y$  sont les coordonnées normales sur  $W_p$  associées à la base  $e_1, e_2$ , alors on a les relations

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta),$$

qui sont les relations usuelles entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées polaires.

**Proposition 3.8.1** *En coordonnées polaires, le tenseur métrique prend la forme suivante :*

$$g = dr^2 + b^2(r, \theta)d\theta^2.$$

De plus, on a pour tout  $\theta$

$$\lim_{r \rightarrow 0} b(r, \theta) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial b}{\partial r}(r, \theta) = 1.$$

**Preuve.** Nous avons à priori la forme générale du tenseur métrique

$$g = h_{1,1}(r, \theta)dr^2 + 2h_{1,2}(r, \theta)drd\theta + h_{2,2}(r, \theta)d\theta^2$$

Or  $h_{1,1} = g\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right) = 1$  car  $\frac{\partial}{\partial r}$  est le vecteur vitesse de la géodésique  $r \mapsto q(r, \theta)$  (avec  $\theta$  constant) et cette géodésique est de vitesse 1 car son vecteur vitesse en  $r = 0$  est le vecteur  $\cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2 \in T_pM$ .

D'autre part  $h_{1,2} = g\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right) = 0$  par le lemme de Gauss. On a donc montré que  $g = dr^2 + b^2(r, \theta)d\theta^2$  avec  $b = \sqrt{h_{2,2}(r, \theta)} = \left\| \frac{\partial}{\partial \theta} \right\|^2$ .

Pour prouver la dernière affirmation on note  $x, y$  les coordonnées normales sur  $W_p$  associées à la base  $e_1, e_2$  et  $g = g_{11}dx^2 + 2g_{12}dxdy + g_{22}dy^2$  le tenseur métrique dans ces coordonnées. On a

$$\frac{\partial}{\partial r} = \cos(\theta)\frac{\partial}{\partial x} + \sin(\theta)\frac{\partial}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \theta} = -r \sin(\theta)\frac{\partial}{\partial x} + r \cos(\theta)\frac{\partial}{\partial y},$$

Donc  $b(r, \theta) = \left\| \frac{\partial}{\partial \theta} \right\| = r \cdot a(r, \theta)$  avec

$$a(r, \theta) = \sqrt{g_{11} \sin^2(\theta) + 2g_{12} \cos(\theta) \sin(\theta) + g_{22} \cos^2(\theta)},$$

ce qui entraîne que  $\lim_{r \rightarrow 0} b(r, \theta) = 0$ . On vérifie facilement que  $\lim_{r \rightarrow 0} a(r, \theta) = 1$  et  $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial a}{\partial r}(r, \theta) = 0$  (car la proposition 3.6.4 entraîne que  $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial g_{ij}}{\partial r} = 0$ ). On a donc finalement  $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial b}{\partial r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial(ra)}{\partial r} = 1$ . □

La construction de coordonnées polaires se généralise en toute dimension. Soit  $p$  un point d'une variété riemannienne  $(M, g)$  et soit  $\delta < \iota(p)$ . Notons  $S_1 \subset T_p M$  la sphère unité de l'espace tangent à  $M$  en  $p$ .

On a alors une application  $\Phi_P : [0, \delta) \times S_1 \rightarrow M$  définie par

$$\Phi(r, u) = \exp_p(ru).$$

Notons  $D = D(p, \delta) = \Phi([0, \delta) \times S_1)$  l'image de cette application. Observons que  $\Phi(0, u) = p$  pour tout  $u \in S_1$  et que la restriction de  $\Phi$  à  $(0, \delta) \times S_1$  est un difféomorphisme sur  $D' = D \setminus \{p\}$ .

Le lemme de Gauss nous dit que les rayons géodésiques issus de  $p$  sont orthogonaux aux sphères riemanniennes définies par

$$\Sigma_r = \Phi(r, S_1) = \exp_p(\{v \in T_p M \mid \|v\| = r\})$$

pour tout  $0 < r < \delta$ .

Donnons-nous un ouvert  $U \subset S_1$  muni de coordonnées  $u^1, \dots, u^{n-1}$ , alors l'application  $\Phi^{-1}$  permet de définir un système de coordonnées  $(r, u^1, \dots, u^{n-1})$  sur un ouvert  $V$  de  $D'$ . On appelle ces coordonnées des *coordonnées polaires de pôle  $p$* .

On a alors le résultat suivant :

**Proposition 3.8.2** *La métrique  $g$  prend la forme suivante en coordonnées polaires :*

$$g = dr^2 + g_{i,j}(r, u) du^i du^j.$$

De plus  $\lim_{r \rightarrow 0} g_{i,j}(r, u) = 0$  et  $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial r} g_{i,j}(r, u)$  est égale à la valeur du tenseur métrique de la sphère unité  $S_1 \subset T_p M$  en coordonnées  $u^1, \dots, u^{n-1}$ .

Observer que le  $g_{i,j}(r, u) du^i du^j$  représente la restriction de la métrique  $g$  sur la sphère riemannienne  $\Sigma_r$ .

### 3.9 Sur les courbes minimisantes

Rappelons que toute courbe de classe  $C^2$  minimisant la longueur est une géodésique à reparamétrisation près (voir le corollaire (3.5.4)). Le résultat qui suit est une généralisation importante

**Proposition 3.9.1** *Soient  $p$  et  $q$  deux points de la variété riemannienne  $(M, g)$  et supposons que  $d(p, q) < \iota(p)$ . Si  $\gamma$  est une courbe continue et de classe  $C^1$  par morceaux reliant  $p$  et  $q$  de longueur minimale, alors  $\gamma$  coïncide à reparamétrisation près à l'unique géodésique de  $p$  à  $q$  contenue dans la boule de centre  $p$  et rayon  $\iota(p)$ .*

**Preuve.** Faisons la preuve en dimension 2. Introduisons des coordonnées polaires  $(r, \theta)$  au voisinage de  $p$ . La métrique  $g$  s'écrit alors  $g = dr^2 + b^2(r, \theta)d\theta^2$ . Supposons que  $(r_0, \theta_0)$  sont les coordonnées du point  $q$  et considérons un chemin  $\gamma(t) = (r(t), \theta(t))$  tel que  $\gamma(0) = p$  et  $\gamma(1) = q$ . Alors

$$\ell(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{\dot{r}(t)^2 + b^2(r(t), \theta(t))\dot{\theta}(t)^2} dt \geq \int_0^1 |\dot{r}(t)| dt \geq r_0,$$

et on a égalité si et seulement si  $\dot{\theta}(t) \equiv 0$  et  $\dot{r} \geq 0$ ; c'est à dire si  $\theta$  est constante et  $r(t)$  est monotone. □

Si  $\gamma : I \rightarrow M$  est une courbe continue et  $C^1$  par morceaux et  $t_1, t_2 \in I$ ,  $t_1 < t_2$ , la longueur de l'arc  $\gamma|_{[t_1, t_2]}$  est l'intégrale

$$\ell_{[t_1, t_2]}(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} \|\dot{\gamma}\| dt.$$

**Définition.** La courbe  $\gamma : I \rightarrow M$  est *localement minimisante pour la longueur* si pour tout  $t_0 \in I$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que si  $t_0 - \varepsilon \leq t_1 < t_2 \leq t_0 + \varepsilon$ , alors

$$d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = \ell_{[t_1, t_2]}(\gamma).$$

**Corollaire 3.9.2** *La courbe  $\gamma$  est localement minimisante pour la longueur si et seulement si c'est une reparamétrisation d'une géodésique.*

### 3.10 Le théorème de Hopf-Rinow

Dans ce paragraphe nous étudions la notion de variétés complète.

**Définition.** 1.) Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne. On dit qu'une géodésique  $\gamma : I \rightarrow M$  (où  $I \subset \mathbb{R}$  est un intervalle contenant 0) est *maximale* si l'intervalle  $I$  est maximal, i.e. si toute géodésique  $\gamma_1 : J \rightarrow M$  qui coïncide avec  $\gamma$  sur un ouvert vérifie  $J \subset I$  et  $\gamma_1 = \gamma|_J$ .

2.) Une géodésique maximale  $\gamma$  est dite *complète* si elle est définie sur  $\mathbb{R}$ , i.e. si  $\gamma(t)$  est défini pour  $-\infty < t < \infty$ .

3.) La variété Riemannienne  $(M, g)$  est dite *géodésiquement complète* si toute géodésique maximale est complète.

**Proposition 3.10.1** Soit  $p$  un point d'une variété riemannienne connexe  $(M, g)$ . Supposons que toute géodésique maximale issue de  $p$  est complète. Alors pour tout point  $q \in M$  il existe une géodésique reliant  $p$  à  $q$  de longueur  $d(p, q)$ .

Remarquons que l'hypothèse dit que  $\Omega_p = T_pM$ , i.e.  $\exp_p$  est définie sur l'espace tangent  $T_pM$  tout entier.

**Preuve.** Notons  $d = d(p, q)$ , et choisissons  $\epsilon$  tel que

$$0 < \epsilon < \min\{d, \iota(p)\}$$

où  $\iota(p)$  est le rayon d'injectivité de  $M$  en  $p$ . Alors  $\exp_p$  est un difféomorphisme de  $\{v \in T_pM \mid \|v\| \leq \epsilon\}$  sur  $\overline{B}(p, \epsilon) = \{x \in M \mid d(p, x) \leq \epsilon\}$ . Par continuité de la fonction distance et par compacité de la sphère, il existe un point  $y_1 \in \partial B(p, \epsilon)$  tel que

$$d(y_1, q) = \min\{d(z, q) \mid z \in \partial B(p, \epsilon)\}.$$

Il existe alors  $v \in T_pM$  tel que  $\|v\| = \epsilon$  et  $\exp_p(v) = y_1$ . On considère maintenant la géodésique

$$\gamma(t) = \exp_p(tv_1), \quad \text{où} \quad v_1 = \frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{\epsilon}v.$$

Par hypothèse cette géodésique est complète, i.e.  $\gamma(t)$  est défini pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , observons aussi que  $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$ . Nous allons montrer que  $\gamma$  est la géodésique cherchée, i.e.  $\gamma(d) = q$ . Remarquons d'abord que par l'inégalité du triangle, on a pour tout  $s \in [0, d]$  :

$$s \geq d(p, \gamma(s)) \geq d - d(\gamma(s), q). \quad (3.10.1)$$

On considère alors l'ensemble

$$J = \{s \in [0, d] \mid d(\gamma(s), q) = d - s\} \subset \mathbb{R}.$$

Observons que si  $s \in J$ , alors pour  $0 \leq t < s$  on a

$$d(\gamma(t), q) \leq d(\gamma(t), \gamma(s)) + d(\gamma(s), q) \leq (s - t) + (d - s) = d - t.$$

Par l'inégalité (3.10.1) appliquée à  $t$ , on a donc  $d(\gamma(t), q) = d - t$ , ceci montre que  $s \in J \Rightarrow t \in J$  pour tout  $0 \leq t < s$ . En particulier  $J$  est un intervalle.

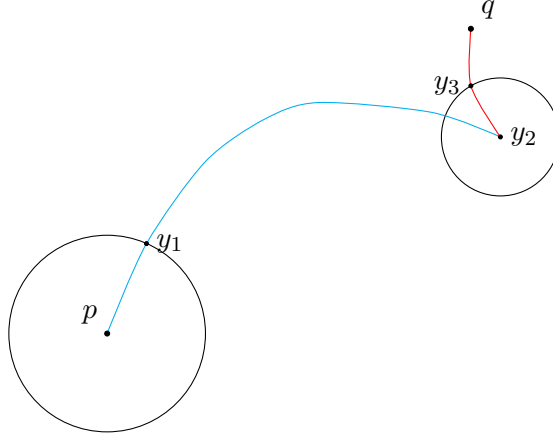
**Affirmation :**  $J = [0, d]$ .

Nous démontrons cette affirmation par l'absurde. On sait déjà que  $J$  est un intervalle qui contient 0 et il est facile de vérifier que  $\epsilon \in J$ . Par continuité de l'application  $s \mapsto s + d(\gamma(s), q)$ , on voit aussi que  $J$  est un intervalle fermé.

Supposons par l'absurde que  $t_0 = \sup J < d$  et montrons que cela conduit à une contradiction. (on sait déjà que  $t_0 \geq \epsilon$  et que  $t_0 \in J$ ).

Pour obtenir la contradiction cherchée, on pose  $y_2 = \gamma(t_0)$ , puis on choisit  $\epsilon'$  tel que  $0 < \epsilon' < \min\{\iota(y_2), d(y_2, q)\}$ . Alors  $\exp_{y_2}$  définit un difféomorphisme de  $\{w \in T_{y_2}M \mid \|w\| < \epsilon'\}$  sur  $B(y_2, \epsilon')$ . Choisissons  $y_3 \in \partial B(y_2, \epsilon')$  tel que  $d(y_3, q)$  soit minimale sur cette sphère :

$$d(y_3, q) = \min\{d(z, q) \mid z \in \partial B(y_2, \epsilon')\}.$$



Il existe alors  $w \in T_{y_2}M$  tel que  $\|w\| = \varepsilon'$  et  $y_3 = \exp_{y_2}(w)$ . Observons les relations suivantes:

a)  $d(y_2, q) = d(y_2, y_3) + d(y_3, q) = \varepsilon' + d(y_3, q)$ .

b)  $d(y_2, q) = d - t_0$  (car  $t_0 \in J$ ).

c)  $d(p, y_3) \leq d(p, y_2) + d(y_2, y_3) = t_0 + \varepsilon'$ .

De (a) et (b) on déduit que

$$d(y_3, q) = d - t_0 - \varepsilon'. \quad (3.10.2)$$

Avec (c) on a donc

$$d = d(p, q) \leq d(p, y_3) + d(y_3, q) \leq (t_0 + \varepsilon') + (d - t_0 - \varepsilon') = d.$$

Il y a donc égalité et par conséquent

$$d(p, y_3) = d - d(y_3, q) = d - (d - t_0 - \varepsilon') = (t_0 + \varepsilon'). \quad (3.10.3)$$

Considérons maintenant la courbe  $\alpha : [0, t_0 + \varepsilon'] \rightarrow M$  définie par

$$\alpha(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{si } 0 \leq t \leq t_0, \\ \exp_{y_2}((t - t_0)w_1) & \text{si } t_0 \leq t \leq t_0 + \varepsilon', \end{cases}$$

où  $w_1 = \frac{w}{\|w\|}$ . Alors  $\alpha(0) = p$ ,  $\alpha(t_0) = y_2$  et  $\alpha(t_0 + \varepsilon') = y_3$ . De plus la longueur de  $\alpha$  est

$$\ell(\alpha) = t_0 + \varepsilon' = d(p, y_3) = d(\alpha(0), \alpha(t_0 + \varepsilon')).$$

Par conséquent  $\alpha$  est géodésique par le corollaire 3.9.2 et donc  $\alpha(t) = \gamma(t)$  pour tout  $t \in [0, t_0 + \varepsilon']$ . Ainsi

$$d(\gamma(t_0 + \varepsilon'), q) = d(y_3, q) = d - (t_0 + \varepsilon'),$$

ce qui signifie que  $t_0 + \varepsilon' \in J$  et contredit la définition de  $t_0 = \sup J$ . On a prouvé que  $t_0 = d$  et  $J = [0, d]$ .

On a en particulier montré que  $d \in J$ , c'est-à-dire  $d(\gamma(d), q) = d - d = 0$ . Ainsi  $\gamma(d) = q$  et  $\gamma|_{[0, d]}$  est une géodésique de longueur  $d = d(p, q)$  reliant  $p$  à  $q$ .  $\square$

**Corollaire 3.10.2** *Si  $(M, g)$  est une variété riemannienne connexe et si toute géodésique issue du point  $p \in M$  est complète, alors  $\exp_p : T_p M \rightarrow M$  est bien définie et surjective.*

Le théorème de Hopf-Rinow reprend et précise les résultats précédent et énonce des conséquences topologiques et métriques.

**Théorème 3.10.3 (Hopf-Rinow)** *Les quatre conditions suivantes sont équivalentes pour toute variété Riemannienne connexe  $(M, g)$  :*

- (a)  *$(M, g)$  est géodésiquement complète.*
- (b) *Il existe un point  $p \in M$  tel que toute géodésique issue de  $p$  est complète.*
- (c) *Toute boule fermée de l'espace métrique  $(M, d)$  est compacte (où  $d$  est la distance induite par  $g$ ).*
- (d) *L'espace métrique  $(M, d)$  est complet (i.e. toute suite de Cauchy converge).*

*De plus si l'une des conditions précédente est vérifiée, alors toute paire de point  $p, q \in M$  peut-être reliée par une géodésique minimisante.*

On dit que la variété riemannienne  $(M, g)$  est *complète* si l'une des conditions (et donc toutes) du théorème est vérifiée. Observons que la propriété (c) signifie que l'espace métrique  $(M, d)$  vérifie la condition de Bolzano-Weierstrass : *toute suite bornée de  $M$  contient une sous-suite convergente.*

**Démonstration.** L'implication (a)  $\Rightarrow$  (b) est évidente. Pour prouver que (b)  $\Rightarrow$  (c) on observe que la proposition précédente entraîne que pour tout  $r \geq 0$  on a

$$\{x \in M \mid d(p, x) \leq r\} = \exp_p(\{v \in T_p M \mid \|v\|_p \leq r\}).$$

C'est donc un ensemble compact car l'image d'un compact par une application continue est compacte. On a donc montré que toute boule fermée centrée en  $p$  est compacte. Si  $q$  est un autre point de  $M$ , alors par l'inégalité du triangle on a

$$\{x \in M \mid d(q, x) \leq r\} \subset \{x \in M \mid d(p, x) \leq r + d(p, q)\}.$$

La boule fermée de rayon  $r$  centrée en  $q$  est donc un sous-ensemble fermé de la boule fermée de centre  $p$  et rayon  $r + d(p, q)$ , il s'agit donc d'un compact.

(c)  $\Rightarrow$  (d) est conséquence du fait que toute suite de Cauchy est contenue dans une boule fermée et donc possède une sous-suite convergente par (c).

Finalement, pour prouver (d)  $\Rightarrow$  (a) on considère une géodésique maximale  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$  et on suppose par l'absurde que  $I \neq \mathbb{R}$ . Supposons que  $t_0 = \sup I < \infty$ , alors  $x_k = \gamma(t_0 - 1/k)$  est une suite de Cauchy car  $d(x_k, x_l) \leq \|\dot{\gamma}\| \cdot |1/k - 1/l|$ . Par conséquent cette suite converge et on peut alors prolonger  $\gamma$  jusqu'à  $t_0$  en posant

$$\gamma(t_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma(t_0 - 1/k).$$

Quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer que la suite  $v_k = \dot{\gamma}(t_0 - 1/k) \in TM$  converge aussi vers un vecteur unité  $v_0 \in T_{\gamma(t_0)}M$  (on utilise ici la compacité de la sphère

unité). On peut alors prolonger la géodésique  $\gamma$  jusqu'à  $t < t_0 + \varepsilon$  pour  $\varepsilon > 0$  assez petit en posant

$$\tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{si } t \in I \\ \exp_{\gamma(t_0)}((t - t_0)v_0) & \text{si } t_0 \leq t \leq t_0 + \varepsilon. \end{cases}$$

Cela contredit la définition de  $t_0$ , par conséquent  $\sup I = \infty$ . Un argument similaire montre que  $\inf I = -\infty$  et donc  $I = \mathbb{R}$ . On a montré que toute géodésique de  $M$  est complète. □

**Remarque.** Ce théorème est apparu la première fois dans l'article de Heinz Hopf et Willi Rinow, *Ueber den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Flächen* publié en 1931. La version présentée ici est celle que Georges de Rham a publiée dans l'appendice de son célèbre article de 1952 *Sur la réductibilité d'un espace de Riemann*. Cette version est celle qu'on trouve dans la plupart des livres de géométrie riemannienne aujourd'hui.



## Chapter 4

# Courbure des variétés riemanniennes

### 4.1 Le tenseur de Courbure

Pour une connexion  $\nabla$  définie sur une variété différentiable  $M$ , les dérivées covariantes secondes ne commutent généralement pas, i.e.

$$\nabla_X \nabla_Y Z \neq \nabla_Y \nabla_X Z$$

pour des champs de vecteurs généraux  $X, Y, Z \in \Gamma(M)$ . Le tenseur de courbure mesure le défaut de commutation des dérivées covariantes.

**Définition.** Le *tenseur de courbure de Riemann-Christoffel* d'une connexion  $\nabla$  sur la variété différentiable  $M$  est l'application

$$R : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \times \Gamma(M) \rightarrow \Gamma(M)$$

définie par

$$R(X, Y)Z = R_{X,Y}Z = (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]})Z. \quad (4.1.1)$$

On note aussi

$$R(X, Y) = R_{X,Y} = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]}.$$

Le nom de *tenseur* pour cette application est justifié par la proposition suivante:

**Proposition 4.1.1** *L'application  $R$  définit un champ de tenseur, i.e. elle est  $C^\infty(M)$ -trilinéaire.*

**Proof.** L'additivité en chaque variable est évidente. Si on multiplie le champs de vecteurs  $X$  par une fonction  $f \in C^\infty(M)$  et on utilise l'identité

$$[fX, Y] = f[X, Y] - Y(f) \cdot X,$$

alors on obtient

$$\begin{aligned} R(fX, Y)(Z) &= f \cdot \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y (f \nabla_X Z) - f \cdot \nabla_{[X,Y]}(Z) + \nabla_{Y(f)X} Z \\ &= f \cdot \nabla_X \nabla_Y Z - (f \cdot \nabla_Y (\nabla_X Z) + Y(f) \nabla_X Z) - f \cdot \nabla_{[X,Y]}(Z) + Y(f) \nabla_X Z \\ &= f \cdot \nabla_X \nabla_Y Z - f \cdot \nabla_Y (\nabla_X Z) - f \cdot \nabla_{[X,Y]}(Z) \\ &= f \cdot R(X, Y)(Z). \end{aligned}$$

Cela montre la  $C^\infty(M)$ -linéarité de  $R$  en  $X$ . On prouve de façon semblable que

$$R(X, fY)(Z) = R(X, Y)(fZ) = f \cdot R(X, Y)(Z).$$

□

Ainsi le tenseur de courbure est un  $\binom{1}{3}$ -tenseur. Dans le cas d'une variété Riemannienne  $(M, g)$ , nous introduisons aussi le  $\binom{0}{4}$ -tenseur de courbure

$$\hat{R} : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \times \Gamma(M) \times \Gamma(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

défini par

$$\hat{R}(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W) \quad (4.1.2)$$

où  $R$  est le  $\binom{1}{3}$ -tenseur de la connexion de Levi-Civita.

Il est fréquent de laisser tomber le chapeau sur ce tenseur et de le noter simplement  $R$ . Le symbole  $R$  désigne alors deux types de tenseurs (reliés par (4.1.2)), le contexte permet généralement de décider lequel des deux tenseurs apparaît dans une formule ou un calcul et il n'y a pas de risque d'ambiguïté. Noter que les deux tenseurs contiennent exactement la même information.

L'interprétation géométrique du tenseur de courbure, et en particulier la justification du terme "courbure" pour cet opérateur, sera clarifiée plus tard. Pour nous familiariser avec ce tenseur nous commençons par explorer ses propriétés algébriques. Commençons par examiner l'expression en coordonnées du tenseur de courbure

**Lemme 4.1.2** *On définit les composantes du tenseur de courbure  $R$  dans un système de coordonnées  $x^1, \dots, x^n$  défini sur un ouvert  $U$  de  $M$  par*

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \frac{\partial}{\partial x^k} = R^l_{ijk} \cdot \frac{\partial}{\partial x^l}. \quad \Leftrightarrow \quad R = R^l_{ijk} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^l}$$

On a alors<sup>1</sup>

$$R^l_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^l_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^j} + \Gamma^m_{jk} \Gamma^l_{im} - \Gamma^m_{ik} \Gamma^l_{jm}. \quad (4.1.3)$$

Le  $\binom{0}{4}$  tenseur a pour composantes

$$\hat{R}_{ijkl} = g_{lm} R^m_{ijk}.$$

**Preuve.** On a par définition

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \frac{\partial}{\partial x^k} = R^l_{ijk} \cdot \frac{\partial}{\partial x^l}.$$

Pour simplifier les notations, on pose

$$\partial_j = \frac{\partial}{\partial x^j} \quad \text{et} \quad \nabla_i = \nabla_{\partial_i} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}.$$

<sup>1</sup>On définit parfois les composantes de  $R$  par  $R\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right) \frac{\partial}{\partial x^j} = R^i_{jkl} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}$ ; avec cette convention, l'identité (4.1.3) s'écrit  $R^i_{jkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} + \Gamma^m_{jl} \Gamma^i_{mk} - \Gamma^m_{jk} \Gamma^i_{ml}$ .

Les symboles de Christoffels de  $\nabla$  vérifient

$$\nabla_j \partial_k = \Gamma_{jk}^m \partial_m,$$

ainsi

$$\begin{aligned} \nabla_i \nabla_j \partial_k &= \nabla_i (\Gamma_{jk}^m \partial_m) \\ &= \Gamma_{jk}^m \nabla_i (\partial_m) + (\partial_i \Gamma_{jk}^m) \partial_m \\ &= \Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l \partial_l + (\partial_i \Gamma_{jk}^m) \partial_m \\ &= (\Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l + \partial_i \Gamma_{jk}^l) \partial_l \end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned} \nabla_j \nabla_i \partial_k &= \nabla_j (\Gamma_{ik}^m \partial_m) \\ &= \Gamma_{ik}^m \nabla_j (\partial_m) + (\partial_j \Gamma_{ik}^m) \partial_m \\ &= \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l \partial_l + (\partial_j \Gamma_{ik}^m) \partial_m \\ &= (\Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l + \partial_j \Gamma_{ik}^l) \partial_l \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} R(\partial_i, \partial_j) \partial_k &= \nabla_i \nabla_j \partial_k - \nabla_j \nabla_i \partial_k \\ &= (\partial_i \Gamma_{jk}^l - \partial_j \Gamma_{ik}^l + \Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l) \partial_l. \end{aligned}$$

De façon équivalente

$$R_{ijk}^l = \partial_i \Gamma_{jk}^l - \partial_j \Gamma_{ik}^l + \Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l.$$

□

Observons qu'il suit immédiatement du lemme précédent que le tenseur de courbure d'une variété riemannienne localement isométrique à l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$  est nul. On verra que la réciproque est également valable : *toute variété riemannienne de courbure nulle est localement isométrique à  $\mathbb{R}^n$ .*

**Remarque.** Rappelons que lorsque  $\nabla$  est la connexion de Levi-Civita d'une variété Riemannienne  $(M, g)$ , alors

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{km} \left( \frac{\partial g_{mj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \right).$$

Par conséquent les coefficients du tenseur de courbures  $R$  s'écrivent algébriquement à partir des dérivées premières et secondes des composantes du tenseur métrique  $g_{ij}$ . On peut considérer que le tenseur de courbure est une sorte de "hessien" du tenseur métrique. En élaborant cette remarque, on obtient la formule suivante:

**Lemme 4.1.3** *Au centre d'un systèmes de coordonnées normales de Riemann, les dérivées secondes du tenseur métrique sont données par*

$$\partial_{ij}^2 g_{kl} = \frac{1}{6} (R_{iklj} + R_{ikjl}).$$

**Proposition 4.1.4** *Le tenseur de courbure d'une variété riemannienne vérifie les propriétés algébriques suivantes*

- (i)  $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$ .
- (ii)  $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$ .
- (iii)  $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = -\langle R(X, Y)(W), Z \rangle$ .
- (iv)  $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(Z, W)X, Y \rangle$ .

Ces propriétés s'écrivent sont un peu plus faciles à lire dans le cas du  $\binom{0}{4}$  tenseur de courbure :

- (i)  $\hat{R}(X, Y, Z, W) = -\hat{R}(Y, X, Z, W)$ .
- (ii)  $\hat{R}(X, Y, Z, W) + \hat{R}(Y, Z, X, W) + \hat{R}(Z, X, Y, W) = 0$ .
- (iii)  $\hat{R}(X, Y, Z, W) = -\hat{R}(X, Y, W, Z)$ .
- (iv)  $\hat{R}(X, Y, Z, W) = \hat{R}(Z, W, X, Y)$ .

Ainsi le  $\binom{0}{4}$  est antisymétrique en les deux premières variables, il est aussi antisymétrique en les deux dernières variables et se comporte de façon symétrique lorsqu'on échange les deux premières variables avec les deux dernières variables. La deuxième condition s'appelle la *première identité de Bianchi*.

**Preuve.** La première propriété est une conséquence immédiate de la définition du tenseur de courbure. Montrons la seconde propriété, on a :

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X, Y]}Z \\ R(Y, Z)X &= \nabla_Y(\nabla_Z X) - \nabla_Z(\nabla_Y X) - \nabla_{[Y, Z]}X \\ R(Z, X)Y &= \nabla_Z(\nabla_X Y) - \nabla_X(\nabla_Z Y) - \nabla_{[Z, X]}Y. \end{aligned}$$

Notons  $S$  la somme  $S = R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y$ . Alors

$$\begin{aligned} S &= \nabla_X(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y) + \nabla_Y(\nabla_Z X - \nabla_X Z) \\ &\quad + \nabla_Z(\nabla_X Y - \nabla_Y X) - \nabla_{[X, Y]}Z - \nabla_{[Y, Z]}X - \nabla_{[Z, X]}Y. \end{aligned}$$

Or la symétrie de la connexion de Levi-Civita dit que  $\nabla_Y Z - \nabla_Z Y = [Y, Z]$ , donc

$$\nabla_X(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y) - \nabla_{[Y, Z]}X = \nabla_X([Y, Z]) - \nabla_{[Y, Z]}X = [X, [Y, Z]]$$

En appliquant cette remarque aux autres parties de la somme  $S$ , on obtient

$$S = [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]]$$

qui est nul par l'identité de Jacobi.

La troisième propriété découle de la compatibilité de la connexion avec la métrique. Pour la démontrer il suffit de prouver que

$$g(R(X, Y)W, W) = 0$$

pour tous vecteurs  $X, Y, W$ . Observons que

$$X(Yg(W, W)) = 2Xg(\nabla_Y W, W) = 2g(\nabla_X \nabla_Y W, W) + 2g(\nabla_Y W, \nabla_X W).$$

De même

$$Y(Xg(W, W)) = 2Yg(\nabla_X W, W) = 2g(\nabla_Y \nabla_X W, W) + 2g(\nabla_X W, \nabla_Y W).$$

En soustrayant ces deux expressions on obtient

$$X(Yg(W, W)) - Y(Xg(W, W)) = 2g(\nabla_X \nabla_Y W - \nabla_Y \nabla_X W, W),$$

et donc

$$\begin{aligned} g(R(X, Y)W, W) &= g(\nabla_X \nabla_Y W - \nabla_Y \nabla_X W - \nabla_{[X, Y]} W, W) \\ &= \frac{1}{2} (X(Yg(W, W)) - Y(Xg(W, W))) - g(\nabla_{[X, Y]} W, W) \\ &= \frac{1}{2} [X, Y]g(W, W) - g(\nabla_{[X, Y]} W, W) \\ &= 0. \end{aligned}$$

La dernière propriété est une conséquence algébrique (non banale) des trois autres.  $\square$

#### 4.1.1 La courbure sectionnelle

**Proposition 4.1.5** *Soit  $p$  un point de la variété Riemannienne  $(M, g)$ , et  $\Pi \subset T_p M$  un sous-espace vectoriel de dimension 2 de  $T_p M$  engendré par deux vecteurs  $X$  and  $Y$ . Alors la quantité*

$$K(X, Y) = \frac{\langle R(X, Y)Y, X \rangle}{\|X\|^2 \|Y\|^2 - \langle X, Y \rangle^2}$$

*ne dépend que du plan  $\Pi$  et non des vecteurs  $X, Y$ .*

Remarquons que le dénominateur  $\|X\|^2 \|Y\|^2 - \langle X, Y \rangle^2$  représente le carré de l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs  $X, Y$ ; on la note aussi  $\|X \wedge Y\|^2$ .

**Définition.** Cette quantité s'appelle la *courbure sectionnelle* du 2-plan  $\Pi \subset T_p M$ , et on note  $K(\Pi) = K(X, Y)$ .

**Preuve de la proposition.** Soit  $e_1, e_2$  une base orthonormée du 2-plan  $\Pi$ . Alors on peut écrire  $X = x^1 e_1 + x^2 e_2$  et  $Y = y^1 e_1 + y^2 e_2$ . La multilinéarité du tenseur de courbure avec la proposition 4.1.4 entraîne que

$$R(X, Y, Y, X) = \det \begin{pmatrix} x^1 & y^1 \\ x^2 & y^2 \end{pmatrix}^2 \cdot R(e_1, e_2, e_2, e_1).$$

Le résultat suit immédiatement.  $\square$

### 4.1.2 Courbure de Ricci et courbure scalaire.

**Définition.** Si  $V, W \in T_p M$  sont des vecteurs tangents en un point  $p$  d'une variété riemannienne  $(M, g)$ , alors

$$X \mapsto R(X, V)(W)$$

définit un endomorphisme de l'espace tangent  $T_p M$ . La trace de cet endomorphisme est la *courbure de Ricci*. On note

$$\text{Ric}_p(V, W) = \text{Trace}[X \mapsto R(X, V)(W)].$$

Si  $e_1, \dots, e_n$  est une base orthonormée de  $T_p M$ , alors

$$\text{Ric}_p(V, W) = \sum_i R(e_i, V, W, e_i),$$

c'est la "contraction" ou la "trace" du tenseur de courbure. La courbure de Ricci est donc un champ de tenseurs covariant d'ordre 2, dans un système de coordonnées locales on a

$$\text{Ric} = \text{Ric}_{ij} dx^i \otimes dx^j \quad \text{avec} \quad \text{Ric}_{ij} = \sum_k R_{kij}^k$$

**Lemme 4.1.6** *Le tenseur de Ricci est symétrique :*

$$\text{Ric}(V, W) = \text{Ric}(W, V).$$

**Preuve.** On a

$$R(e_i, V, W, e_j) = -R(e_i, V, e_j, W) = -R(e_j, W, e_i, V) = R(e_j, W, V, e_i).$$

En posant  $j = i$  et en sommant sur  $i$  on obtient le résultat. □

**Définition** La *Courbure scalaire* est la contraction du tenseur de Ricci, c'est-à-dire la fonction  $S \in C^\infty(U)$  définie par

$$S(p) = \sum_j \text{Ric}_p(e_j, e_j),$$

où  $e_1, \dots, e_n$  est une base orthonormée de  $T_p M$ ,

**Remarque.** Si  $e_1, \dots, e_n$  est une base orthonormée, alors

$$\text{Ric}_p(e_j, e_j) = \sum_{j \neq i} K_p(e_i, e_j) \quad \text{et} \quad S(p) = \sum_i \sum_{j \neq i} K_p(e_i, e_j).$$

En particulier si la courbure sectionnelle de  $M$  est constante  $= k$ , alors

$$\text{Ric}_p(e_j, e_j) = (n-1)k \quad \text{et} \quad S = n(n-1)k.$$

## 4.2 Sous-variétés et deuxième forme fondamentale

### 4.2.1 Définition

Soit  $(M, g)$  une variété Riemannienne de dimension  $m$  et  $N \subset M$  une sous-variété de dimension  $n$ . Pour  $p \in M$  on note :

$$T_p N^\perp = \{v \in T_p M \mid v \perp T_p N\}$$

le complément orthogonal de  $T_p N$  dans  $T_p M$ . Observons que  $T_p M = T_p N \oplus T_p N^\perp$ , en particulier

$$\dim(T_p N^\perp) = \dim(M) - \dim(N) = m - n = \text{codim}(N, M).$$

On note

$$\pi_p^\top : T_p M \rightarrow T_p N \quad \text{et} \quad \pi_p^\perp : T_p M \rightarrow T_p N^\perp$$

les projections naturelles, et  $\bar{g} = g|_N$  la restriction du tenseur métrique de  $M$  à la sous-variété  $N$ . On dit parfois que  $\bar{g}$  est la *première forme fondamentale* de  $N \subset (M, g)$ , observons que  $(N, \bar{g})$  est elle-même une variété Riemannienne.

**Définition 4.2.1** Soient  $X, Y \in \Gamma(M)$  deux champs de vecteurs de  $M$  et  $p$  un point sur la sous-variété  $N$ . On pose

$$\bar{\nabla}_X Y := \pi^\top(\nabla_X Y) \quad (\text{aussi noté } (\nabla_X Y)^\top)$$

et

$$B(X, Y) := \pi^\perp(\nabla_X Y) \quad (\text{aussi noté } (\nabla_X Y)^\perp).$$

$B(X, Y)$  s'appelle la deuxième forme fondamentale de  $N \subset M$ .

Observons que

$$\nabla_X Y = \bar{\nabla}_X Y + B(X, Y)$$

avec  $\bar{\nabla}_X Y \in TN$  et  $B(X, Y) \perp TN$ .

Afin d'étudier la deuxième forme fondamentale  $B$  et l'opérateur  $\bar{\nabla}$ , on introduit l'ensemble  $\Gamma(M, N)$  des champs de vecteurs de  $M$  qui sont tangents  $N$  en tout point  $p$  de  $N$  :

$$\Gamma(M, N) = \{X \in \Gamma(M) \mid X_p \in T_p N \text{ pour tout } p \in N\},$$

**Lemme 4.2.2** Pour tout  $X \in \Gamma(M)$  on a

- a.)  $X \in \Gamma(M, N)$  si et seulement si  $X_p(f) = 0$  pour tout point  $p \in N$  et toute fonction  $f \in C^\infty(M)$  qui est constante sur  $N$ .
- b.) Si  $X, Y \in \Gamma(M, N)$ , alors  $[X, Y] \in \Gamma(M, N)$ .
- c.) L'application de restriction  $\Gamma(M, N) \rightarrow \Gamma(N)$  est surjective, i.e. tout champs de vecteurs  $X \in \Gamma(N)$  admet une extension (non unique) en un champ de vecteurs de  $M$ .

**Preuve.** (a.) Soit  $X \in \Gamma(M, N)$  et  $f \in C^\infty(M)$  une fonction qui est constante sur  $N$ . Pour un point  $p \in N$  on choisit une courbe  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow N$  telle que  $\gamma(0) = p$  et  $\dot{\gamma}(0) = X_p$ , alors

$$X_p(f) = \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = 0$$

puisque  $f(\gamma(t))$  est constant.

Pour prouver la direction inverse, on choisit un système de coordonnées  $(x^1, \dots, x^m)$  dans un voisinage  $U \subset M$  d'un point  $p \in N$  tel que  $N \cap U = \{x \in U \mid x^{n+1} = \dots = x^m = 0\}$  (un tel système de coordonnées est dit *adapté* à la sous-variété  $N$ ). Si  $X \in \Gamma(M)$  s'annule sur toute fonction constante sur  $N$ , alors  $X(x^j) = 0$  pour  $n+1 \leq j \leq m$ . Posons  $X = \sum_{j=1}^m a^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ , alors  $a^j = X(x^j) = 0$  for  $j > n$ . Par conséquent

$$X = \sum_{j=1}^n a^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

est en effet tangente à  $N$ .

(b) C'est une conséquence directe de (a): si  $f \in C^\infty(M)$  est constante sur  $N$ , alors en tout point de  $N$  on a

$$[X, Y](f) = X(Yf) - Y(Xf) = 0 - 0 = 0.$$

(c) Pour un champ  $X \in \Gamma(N)$  on doit construire une extension  $\tilde{X} \in \Gamma(M)$  telle que pour tout  $p \in N$  on a  $\tilde{X}_p = X_p$ . On construit d'abord cette extension dans le domaine  $U \subset M$  d'un système de coordonnées au voisinage de  $p \in N$  adapté à la sous-variété, i.e. tel que  $N \cap U = \{x \in U \mid x^{n+1} = \dots = x^m = 0\}$ . La restriction de  $X$  à  $N \cap U$  s'écrit  $X = \sum_{j=1}^n a^j \frac{\partial}{\partial x^j}$  et on définit  $\tilde{X}$  par la même formule (mais dans  $U$  et non seulement dans  $N \cap U$ ). Nous concluons la preuve avec un argument de partition de l'unité. □

Nous pouvons maintenant démontrer le résultat suivant :

**Proposition 4.2.3**  $\bar{\nabla}$  est la connexion de Levi-Civita de  $(N, \bar{g})$ .

**Preuve** On vérifie d'abord que  $\bar{\nabla}$  est sans torsion. Donnons-nous  $X, Y \in \Gamma(N)$  et étendons ces champs en tant que champs de vecteurs dans  $M$  (c'est-à-dire comme éléments de  $\Gamma(M, N)$ ). Nous avons alors en tout point de  $N$

$$\bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X = (\nabla_X Y)^\top - (\nabla_Y X)^\top = [X, Y]^\top = [X, Y]$$

car  $[X, Y]$  est tangent à  $N$ .

Vérifions maintenant que  $\bar{\nabla}$  est compatible avec la métrique  $\bar{g}$  sur  $N$ . Soit  $X, Y, Z \in \Gamma(N)$  et étendons à nouveau ces champs de vecteurs en tant que champs de vecteurs dans  $M$ . Nous avons alors

$$\begin{aligned} Z\bar{g}(X, Y) &= Zg(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y) \\ &= g(\bar{\nabla}_Z X + B(Z, X), Y) + g(X, \bar{\nabla}_Z Y + B(Z, Y)) \\ &= g(\bar{\nabla}_Z X, Y) + g(X, \bar{\nabla}_Z Y) \\ &= \bar{g}(\bar{\nabla}_Z X, Y) + \bar{g}(X, \bar{\nabla}_Z Y). \end{aligned}$$



□

**Proposition 4.2.4** *La deuxième forme fondamentale d'une sous-variété de  $N \subset (M, g)$  vérifie les propriétés suivantes:*

(a.)  $B$  est  $C^\infty(N)$  - bilinéaire (i.e.  $B$  est tensoriel).

(b.) Pour tout  $p \in N$ ,  $B_p : T_p N \times T_p N \rightarrow T_p N^\perp$  est bien défini (i.e.  $B(X_p, Y_p)$  ne dépend que des valeurs de  $X$  et  $Y$  en  $p \in N$ ).

(c.)  $B$  est symétrique.

**Preuve** (a.) Il est clair que  $B$  est  $\mathbb{R}$  -bilinéaire. Prouvons que  $B(fX, Y) = B(X, fY) = fB(X, Y)$  pour tout  $f \in C^\infty(N)$  et tout  $X, Y \in \Gamma(N)$ . Étendons  $f$  comme fonction  $f \in C^\infty(M)$ , nous avons alors en tout point  $p \in N$ :

$$B(fX, Y) = \pi^\perp(\nabla_{fX} Y) = \pi^\perp(f\nabla_X Y) = f\pi^\perp(\nabla_X Y) = fB(X, Y)$$

et

$$B(X, fY) = \pi^\perp(\nabla_X (fY)) = \pi^\perp(f\nabla_X Y + X(f)Y) = f\pi^\perp(\nabla_X Y) = fB(X, Y)$$

(on a utilisé  $Y \in \ker \pi^\perp$ ).

(b.) est une conséquence de (a.). Choisissons un système de coordonnées  $(x^1, \dots, x^m)$  adapté à la sous-variété  $N$ . La restriction de  $B$  à  $T(N \cap U)$  est déterminée par ses composantes :

$$B_x \left( \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \sum_{k=1}^m B_{ij}^k(x) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

(c.) Nous avons maintenant

$$\begin{aligned} B(X, Y) - B(Y, X) &= \pi^\perp(\nabla_X Y) - \pi^\perp(\nabla_Y X) \\ &= \pi^\perp(\nabla_X Y - \nabla_Y X) \\ &= \pi^\perp([X, Y]), \end{aligned}$$

qui est nul puisque  $[X, Y] \in \Gamma(M, N)$ .

□

Le lemme suivant nous dit que la seconde forme fondamentale mesure l'accélération covariante dans  $M$  d'une géodésique de  $N$ .

**Lemme 4.2.5** *Pour toute géodésique  $\gamma$  de  $N$  on a*

$$B(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) = \nabla_{\dot{\gamma}(t)} \dot{\gamma}(t).$$

**Preuve** C'est évident :

$$B(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) = \nabla_{\dot{\gamma}(t)}\dot{\gamma} - \bar{\nabla}_{\dot{\gamma}(t)}\dot{\gamma} = \nabla_{\dot{\gamma}(t)}\dot{\gamma}$$

car  $\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}(t)}\dot{\gamma} = 0$  puisque  $\gamma$  est une géodésique de  $(N, \bar{g})$ . □

**Définition.** On dit que la sous-variété  $N \subset M$  est *totalelement géodésique* si toute géodésique de  $N$  est aussi une géodésique de  $M$ .

Nous avons donc par le lemme précédent :

**Corollaire 4.2.6**  $N \subset M$  est totalelement géodésique si et seulement si  $B \equiv 0$ .

## 4.2.2 Les équations fondamentales

Voyons les équations fondamentales de la théorie des sous-variétés s'une variété riemannienne.

**Proposition 4.2.7 (L'équation de Weingarten)** Soit  $N$  une sous-variété de  $(M, g)$  et  $X, Y, W \in \Gamma(M)$ . Supposons que pour tout  $p \in N$  on a  $X_p, Y_p \in T_p N$  (i.e.  $X, Y \in \Gamma(M, N)$ ) et  $W_p \in T_p N^\perp$ . Alors

$$g_p(\nabla_X W, Y) = -g_p(W, B(X, Y))$$

pour tout  $p \in N$ .

**Preuve.** On a  $g_p(W, Y) = 0$  pour tout  $p \in N$ , donc

$$\begin{aligned} 0 &= Xg(W, Y) \\ &= g(\nabla_X W, Y) + g(W, \nabla_X Y) \\ &= g(\nabla_X W, Y) + g(W, \bar{\nabla}_X Y + B(X, Y)) \\ &= g(\nabla_X W, Y) + g(W, B(X, Y)) \end{aligned}$$

car  $\bar{\nabla}_X Y \perp W$ . □

Le résultat principal sur la seconde forme fondamentale est l'équation de Gauss qui compare les tenseurs de courbure de  $N$  et  $M$ .

**Théorème 4.2.8 (L'équation de Gauss)** Soit  $p$  un point d'une  $N$  sous-variété de  $(M, g)$  et  $X, Y, Z, W \in T_p N$ . Alors

$$\bar{g}(\bar{R}(X, Y)Z, W) - g(R(X, Y)Z, W) = g(B(X, W), B(Y, Z)) - g(B(X, Z), B(Y, W)),$$

où  $R$  est le tenseur de courbure  $(M, g)$  et  $\bar{R}$  est le tenseur de courbure  $(N, \bar{g})$ .

**Preuve.** On étend les vecteurs  $X, Y, Z, W$  en champs  $X, Y, Z, W \in \Gamma(M, N)$ . Pour la preuve on peut supposer sans perdre de généralité que tout les crochets s'annulent  $[X, Y] = 0$  etc. On a alors

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z &= \nabla_X(\bar{\nabla}_Y Z) - B(X, \bar{\nabla}_Y Z) \\ &= \nabla_X(\nabla_Y Z - B(Y, Z)) - B(X, \bar{\nabla}_Y Z) \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_X B(Y, Z) - B(X, \bar{\nabla}_Y Z). \end{aligned}$$

Pour un vecteur  $W$  tangent à  $N$  on a  $g(B(X, \bar{\nabla}_Y Z), W) = 0$ , par conséquent

$$g(\bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z, W) = g(\nabla_X \nabla_Y Z, W) - g(\nabla_X B(Y, Z), W).$$

En utilisant maintenant l'équation de Weingarten

$$g(\nabla_X B(Y, Z), W) = -g(B(Y, Z), B(X, W)),$$

on obtient

$$g(\bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z, W) = g(\nabla_X \nabla_Y Z, W) + g(B(X, W), B(Y, Z)).$$

De même

$$g(\bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z, W) = g(\nabla_Y \nabla_X Z, W) + g(B(X, Z), B(Y, W)).$$

L'équation de Gauss suit immédiatement des deux dernières égalités. □

**Corollaire 4.2.9** *Si  $N$  est une sous-variété totalement géodésique de  $(M, g)$ , alors*

$$\bar{R}(X, Y)Z = R(X, Y)Z$$

pour tous  $X, Y, Z \in TN$ .

**Corollaire 4.2.10** *Soit  $\bar{K}_p(\Pi)$  la courbure sectionnelle dans  $(N, \bar{g})$  d'un 2-plan  $\Pi \subset T_p N$  et  $K_p(\Pi)$  la courbure sectionnelle du même 2-plan  $\Pi$  mais vu dans  $T_p M$ . Alors*

$$\bar{K}_p(\Pi) = K_p(\Pi) + \frac{\langle B(X, X), B(Y, Y) \rangle - \|B(X, Y)\|^2}{\|X \wedge Y\|^2},$$

où  $X, Y \in T_p M$  est une base de  $\Pi$ .

On dit parfois que  $\bar{K}_p(\Pi)$  est la courbure sectionnelle intrinsèque de  $\Pi \subset T_p N$  et  $K(\Pi)$  est la courbure sectionnelle ambiante.

Une *surface réglée* dans une variété riemannienne  $(M, g)$  est une sous-variété  $N \subset M$  de dimension 2 telle que pour tout  $p \in N$  il existe une courbe  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow N$  contenue dans  $N$  telle que  $\gamma$  est une géodésique de la variété ambiante  $M$ ,  $\gamma(0) = p$  et  $\dot{\gamma}(0) \neq 0$ .

**Corollaire 4.2.11 (L'inégalité de Synge)** *Si  $N \subset M$  est une surface réglée, alors*

$$\bar{K}_p(T_p N) \leq K_p(T_p N).$$

En particulier toute surface réglée de  $\mathbb{R}^n$  est à courbure  $K \leq 0$ .

**Preuve.** Choisissons une base orthonormée  $X, Y$  de  $T_p N$  telle que  $X = \dot{\gamma}(0)$  où  $\gamma \subset N$  est une géodésique de  $M$ . Alors  $B(X, X) = 0$  par le lemme, donc

$$\bar{K}_p(\Pi) = K_p(\Pi) - \|B(X, Y)\|^2 \leq K_p(\Pi).$$

□

### 4.2.3 Hypersurfaces

Considérons le cas spécial des hypersurfaces, i.e. des sous-variété  $N \subset (M, g)$  telles que  $n = \dim(N) = \dim(M) - 1$ .

**Définitions. 1.** Une *co-orientation* de l'hypersurface  $N \subset M$  est un champs de vecteurs  $C^\infty$  orthogonal à  $N$  de longueur 1

$$V : N \rightarrow TM, \quad V_p \perp T_p N, \quad \|V_p\| = 1$$

pour tout  $p \in N$ . Notons qu'une co-orientation existe au voisinage de tout point d'une hypersurface mais pas toujours globalement (la ruban de Möbius dans  $\mathbb{R}^3$  n'est pas globalement co-orientable).

**2.** La seconde forme fondamentale scalaire d'une hypersurface  $N \subset (M, g)$  co-orientée est le champ de tenseurs  $b \in \text{Tens}_2^0(N)$  défini par

$$b(X, Y) = g(B(Y, Y), V) = g(\nabla_X Y, V) \quad \Leftrightarrow \quad B(X, Y) = b(Y, X) \cdot V.$$

**3.** L'*application de Weingarten* de l'hypersurface co-orientée  $N \subset (M, g)$  est définie par<sup>2</sup>

$$L = \nabla V \quad \Leftrightarrow \quad L(X) = \nabla_X V$$

Il est facile de vérifier que  $L(X) \perp V$ , par conséquent l'application de Weingarten définit un endomorphisme  $L_p : T_p N \rightarrow T_p N$  (ou si on préfère  $L \in \text{Tens}_1^1(N)$ ). L'équation de Weingarten peut s'écrire

$$b(X, Y) = -g(L(X), Y).$$

En particulier  $L$  est symétrique  $g(L(X), Y) = g(X, L(Y))$  et les valeurs propres de  $L$  sont donc réelles.

---

<sup>2</sup>Certains auteurs préfèrent l'autre convention de signe :  $L = -\nabla V$ . L'application de Weingarten s'appelle aussi en anglais "the shape operator".

**Definitions.**

i.) Les *courbures principales* de l'hypersurface co-orientée  $N$  au point  $p$  sont les valeurs propres de  $L_p$ . On les notes

$$k_1(p), \dots, k_n(p).$$

ii.) La *courbure de Gauss* (ou de *Gauss-Kronecker*) de  $N$  en  $p$  est le déterminant de  $L$ :

$$K_{\text{Gauss}}(p) = \det(L) = k_1(p) \cdots k_n(p).$$

iii.) La *courbure moyenne* de  $N$  en  $p$  est

$$H(p) = \frac{1}{n} \text{Trace}(L) = \frac{k_1(p) + \cdots + k_n(p)}{n}.$$

iv.) Le point  $p \in N$  est dit *ombilique* si

$$k_1(p) = k_2(p) = \cdots = k_n(p).$$

Un théorème classique dit que les seules surfaces de  $\mathbb{R}^3$  dont tous les points sont ombiliques sont les plans et les sphères.

Si  $N^2 \subset M^3$  est une surface dans une variété de dimension 3 et  $p$  un point de  $N$ , alors l'équation de Gauss peut s'écrire:

$$\bar{K}(p) = K(p) + K_{\text{Gauss}}(p),$$

où  $K(p) = K^M(T_p N)$  est la courbure sectionnelle de  $T_p N \subset T_p M$  dans la variété ambiante  $M$  et  $\bar{K}(p) = K^N(T_p N)$  est la courbure sectionnelle intrinsèque.

Et nous avons le

**Théorème 4.2.12 (Théorème egregium de Gauss (1827))** *Si  $S \subset \mathbb{R}^3$  est une surface dans l'espace Euclidien, alors la courbure de Gauss  $k_1 k_2$  ne dépend que de la première forme fondamentale*

**Preuve.** Comme la courbure ambiante  $K = 0$ , la courbure de Gauss et la courbure sectionnelle intrinsèque de  $S$  coïncident :

$$k_1 k_2 = \bar{K}.$$

□

#### 4.2.4 Relation avec le Hessien d'une fonction

Dans ce paragraphe nous expliquons le lien entre la deuxième forme fondamentale d'une hypersurface définie par  $N = f^{-1}(0)$  où  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction  $C^\infty$  non singulière et le hessien de cette fonction.

Rappelons d'abord que si  $\omega$  est une 1-forme sur  $M$ , alors sa dérivée covariante est définie par

$$\nabla\omega(X, Y) = X\omega(Y) - \omega(\nabla_X Y).$$

Un calcul montre que

$$\nabla\omega(X, Y) - \nabla\omega(Y, X) = d\omega(X, Y),$$

donc si  $\omega$  est fermée, alors  $\nabla\omega$  est un  $(0, 2)$ -tenseur symétrique.

En particulier le *Hessien* d'une fonction  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , que nous définissons par

$$\text{Hess}_f := \nabla df$$

est symétrique :  $\text{Hess}_f(X, Y) = \text{Hess}_f(Y, X)$ . Notons que

$$\text{Hess}_f(X, Y) = \nabla df(X, Y) = X(Yf) - df(\nabla_X Y) = (XY - \nabla_X Y)f.$$

En coordonnées locales :

$$\text{Hess}_f = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k} \right) dx^i \otimes dx^j.$$

Rappelons que le *gradient* de  $f \in C^\infty(M)$  est le champ de vecteur sur  $M$  défini par  $\langle \text{grad} f, Z \rangle = df(Z)$  pour tout  $Z \in TM$ .

**Lemme 4.2.13** *i)*  $\text{Hess}_f(X, Y) = \langle \nabla_X \text{grad} f, Y \rangle$  ;

*ii)*  $\text{Hess}_f(X, X) = \frac{d^2}{dt^2} f \circ \gamma$ , où  $\gamma(t) = \exp(tX)$ .

**Preuve** En utilisant  $\text{Hess}_f(X, Y) = X(Yf) - df(\nabla_X Y)$  on voit que

$$\begin{aligned} X(Yf) &= X\langle Y, \text{grad} f \rangle = \langle \nabla_X Y, \text{grad} f \rangle + \langle Y, \nabla_X \text{grad} f \rangle \\ &= (\nabla_X Y)f + \langle \nabla_X \text{grad} f, Y \rangle. \end{aligned}$$

(ii) Puisque  $\gamma$  est géodésique, on a  $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$ , donc

$$(XX - \nabla_X X)f = \frac{d^2}{dt^2} f \circ \gamma - (\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma})f = \frac{d^2}{dt^2} f \circ \gamma.$$

□

**Corollaire 4.2.14** *Soit  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction différentiable et  $c$  une valeur régulière de  $f$ . Alors la seconde forme fondamentale scalaire de l'hypersurface  $S = f^{-1}(c) \subset M$  pour la co-orientation induite par le gradient de  $f$  est donnée par*

$$b(X, Y) = -\frac{\text{Hess}_f(X, Y)}{\|\text{grad} f\|}.$$

**Preuve** Notons  $W := \text{grad}f$  et  $V = W/\|W\|$ . Observons que  $\langle Y, W \rangle = 0$  pour tout  $Y \in TS$ , par conséquent

$$0 = X\langle Y, W \rangle = \langle \nabla_X Y, W \rangle + \langle \nabla_X W, Y \rangle = \langle B(X, Y), W \rangle + \text{Hess}_f(X, Y),$$

et donc

$$\text{Hess}_f(X, Y) = -\langle B(X, Y), W \rangle = -\|W\|\langle B(X, Y), V \rangle = -\|W\|b(X, Y).$$

□

### 4.3 La formule de variation seconde

Le but de ce paragraphe est de prouver le résultat suivant :

**Théorème 4.3.1 (Formule de variation seconde)** Soit  $\gamma : [a, b] \rightarrow (M, g)$  une géodésique de longueur  $\ell > 0$  paramétrée par la longueur d'arc dans la variété riemannienne  $(M, g)$  et soit  $\phi : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  une variation de classe  $C^2$ . Notons  $\phi_s : [a, b] \rightarrow M$  la courbe  $\phi_s(t) = \phi(t, s)$  et  $\ell(\phi_s)$  sa longueur. Alors

$$\left. \frac{d^2}{ds^2} \right|_{s=0} \ell(\phi_s) = \left. \langle \nabla_Y Y, \dot{\gamma} \rangle \right|_{t=a}^b + \int_a^b \left( \|\nabla_X Y^\perp\|^2 - R(Y, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, Y) \right) dt$$

où  $R$  est le  $\binom{0}{4}$  tenseur de courbure de Riemann,

$$X = \phi_* \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) = \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad Y = \phi_* \left( \frac{\partial}{\partial s} \right) = \frac{\partial \phi}{\partial s}.$$

sont les champs de variation et  $Y^\perp = Y - \frac{\langle Y, X \rangle}{\|X\|^2} X$  est la composante de  $Y$  orthogonale à  $X$ .

Rappelons que  $\phi : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  est une variation de la courbe  $\gamma$  si c'est une application de classe  $C^2$  telle que  $\phi(t, 0) = \gamma(t)$ . Les champs  $X$  et  $Y$  sont des champs de vecteurs le long de  $\phi$ , observons que si  $s = 0$ , alors  $X_{t,0} = \dot{\gamma}(t)$ . En particulier ce vecteur est non nul (car  $\gamma$  est une géodésique non constante). Quitte à restreindre  $\varepsilon$ , on supposera que  $X$  est partout non nul. Remarquons encore que  $\|X\|$  et  $\langle X, Y \rangle$  sont des fonctions de  $s$  et  $t$ .

Pour la preuve de cette formule, nous aurons besoin de trois lemmes.

**Lemme 4.3.2** Pour toute variation  $\phi : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  on a

$$\nabla_X Y = \nabla_Y X, \tag{4.3.1}$$

et

$$\langle \nabla_Y \nabla_X Y, X \rangle = \langle \nabla_X \nabla_Y Y, X \rangle - R(Y, X, X, Y) \tag{4.3.2}$$

**Preuve.** La première équation a été déjà démontrée (lemme 3.5.1). Pour prouver la seconde équation, on observe que

$$R(Y, X, X, Y) = g(\nabla_Y \nabla_X X, Y) - g(\nabla_X \nabla_Y X, Y) - g(\nabla_{[X, Y]} X, Y),$$

or  $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X = 0$  par la première équation.  $\square$

**Lemme 4.3.3** *La fonction  $s \mapsto \ell(\phi_s)$  est dérivable et sa dérivée est donnée pour tout  $s$  par*

$$\frac{d}{ds} \ell(\phi_s) = \int_a^b \left( \frac{\langle \nabla_X Y, X \rangle}{\|X\|} \right) dt.$$

**Preuve.** On a

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \ell(\phi_s) &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial s} \left\| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\| dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial s} \sqrt{\langle X, X \rangle} dt \\ &= \int_a^b \left( \frac{2 \langle \nabla_Y X, X \rangle}{2 \langle X, X \rangle^{1/2}} \right) dt = \int_a^b \left( \frac{\langle \nabla_X Y, X \rangle}{\|X\|} \right) dt. \end{aligned}$$

$\square$

**Remarque.** Une intégration par parties à partir du lemme précédent nous donne le résultat suivant (Formule de variation première) : Soit  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  une courbe de longueur  $\ell$  parcourue à vitesse constante (pas forcément géodésique), alors pour toute variation  $\phi$ , on a

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \ell(\phi_s) = \frac{(b-a)}{\ell} \left\{ \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial s}, \dot{\gamma} \right\rangle \Big|_{t=a}^b - \int_0^1 \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial s}(0, s), \nabla_t \dot{\gamma} \right\rangle dt \right\}.$$

On a déjà prouvé cette formule. Une conséquence est qu'une courbe de classe  $C^2$  est géodésique si et seulement si elle est parcourue à vitesse constante et elle est un point critique pour la fonction longueur.

Le troisième lemme nous donne la norme de  $\nabla_X Y^\perp = \nabla_X (Y^\perp)$ .

**Lemme 4.3.4** *Pour  $s = 0$  et  $a \leq t \leq b$  on a*

$$\|\nabla_X Y^\perp\|^2 = \|\nabla_X Y\|^2 - \langle \nabla_X Y, X \rangle^2.$$

**Preuve.** En  $s = 0$  on a  $\|X\| = \|\dot{\gamma}\| = 1$  et  $\nabla_X X = \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$ , donc

$$\nabla_X Y^\perp = \nabla_X (Y - \langle Y, X \rangle X) = \nabla_X Y - \langle \nabla_X Y, X \rangle X,$$

ce qui signifie que  $\nabla_X Y^\perp$  est la composante de  $\nabla_X Y$  qui est orthogonale à  $X$ . On peut écrire cela ainsi:

$$\nabla_X (Y^\perp) = (\nabla_X Y)^\perp.$$

Par le théorème de Pythagore on a donc

$$\|\nabla_X Y\|^2 = \|\nabla_X Y^\perp\|^2 + \langle \nabla_X Y, X \rangle^2.$$



□

**Preuve du théorème.** Le lemme 4.3.3 dit que

$$\frac{d}{ds}\ell(\phi_s) = \int_a^b \frac{\langle \nabla_X Y, X \rangle}{\|X\|} dt.$$

Calculons la dérivée en  $s$  de l'intégrand :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\langle \nabla_X Y, X \rangle}{\|X\|} \right) &= Y \left( \frac{\langle \nabla_X Y, X \rangle}{\|X\|} \right) \\ &= \frac{Y \langle \nabla_X Y, X \rangle}{\|X\|} + \langle \nabla_X Y, X \rangle Y \left( \frac{1}{\|X\|} \right) \\ &= \frac{\langle \nabla_Y \nabla_X Y, X \rangle + \langle \nabla_X Y, \nabla_Y X \rangle}{\|X\|} - \langle \nabla_X Y, X \rangle \frac{\langle \nabla_Y X, X \rangle}{\|X\|^3} \end{aligned}$$

En utilisant que  $\nabla_X Y = \nabla_Y X$  et  $\|X\| = \|\dot{\gamma}\| = 1$  en  $s = 0$ , on obtient avec les lemmes 4.3.2 et 4.3.4 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \left( \frac{\langle \nabla_X Y, X \rangle}{\|X\|} \right) &= \langle \nabla_Y \nabla_X Y, X \rangle + \|\nabla_X Y\|^2 - \langle \nabla_X Y, X \rangle^2 \\ &= -R(Y, X, X, Y) + \langle \nabla_X \nabla_Y Y, X \rangle + \|\nabla_X Y\|^2 - \langle \nabla_X Y, X \rangle^2 \\ &= -R(Y, X, X, Y) + \langle \nabla_X \nabla_Y Y, X \rangle + \|\nabla_X Y^\perp\|^2. \end{aligned}$$

En utilisant finalement que  $\nabla_X X = 0$ , on observe que  $X \langle \nabla_Y Y, X \rangle = \langle \nabla_X \nabla_Y Y, X \rangle$ , par conséquent on a

$$\langle \nabla_X \nabla_Y Y, X \rangle = X \langle \nabla_Y Y, X \rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle \nabla_Y Y, \dot{\gamma} \rangle$$

Ainsi

$$\frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \left( \frac{\langle \nabla_X Y, X \rangle}{\|X\|} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \langle \nabla_Y Y, \dot{\gamma} \rangle + \|\nabla_X Y^\perp\|^2 - R(Y, X, X, Y).$$

On obtient la formule voulue par intégration :

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} \ell(\phi_s) &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \left( \frac{\langle \nabla_X Y, X \rangle}{\|X\|} \right) dt \\ &= \int_a^b \left( \frac{\partial}{\partial t} \langle \nabla_Y Y, \dot{\gamma} \rangle + \|\nabla_X Y^\perp\|^2 - R(Y, X, X, Y) \right) dt \\ &= \langle \nabla_Y Y, \dot{\gamma} \rangle \Big|_{t=a}^b + \int_a^b \left( \|\nabla_X Y^\perp\|^2 - R(Y, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, Y) \right) dt. \end{aligned}$$

□

**Un exemple important :** Soit  $\gamma : [0, \ell] \rightarrow (M, g)$  une géodésique paramétrée unitairement, et  $Z$  un champ de vecteurs le long de  $\gamma$  orthogonal à  $\dot{\gamma}$ , parallèle et unitaire :

$$Z \perp \dot{\gamma}, \quad \nabla_t Z = 0 \quad \text{et} \quad \|Z\| \equiv 1.$$

Notons

$$\phi(t, s) = \exp_{\gamma(t)}(sf(t)Z),$$

où  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de classe  $C^2$ . Soient  $X = \frac{\partial \phi}{\partial t}$  et  $Y = \frac{\partial \phi}{\partial s}$  les champs de variations. Alors  $Y = Y^\perp$  et on a  $\nabla_Y Y = 0$  car  $s \mapsto \phi(t, s)$  est géodésique pour tout  $t$ . Ainsi

$$\left. \frac{d^2}{ds^2} \right|_{s=0} \ell(\phi_s) = \int_0^\ell (\|\nabla_t Y\|^2 - R(Y, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, Y)) dt.$$

Or  $\nabla_t Y = f'(t)Z$  (car  $\nabla_t Z = 0$ ) et donc  $\|\nabla_t Y\|^2 = (f'(t))^2$  puisque  $\|Z\| = 1$ . De plus

$$R(Y, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, Y) = f^2(t)R(Z, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, Z) = f^2(t)K(\dot{\gamma}, Z).$$

On a donc finalement

$$\left. \frac{d^2}{ds^2} \right|_{s=0} \ell(\phi_s) = \int_0^\ell ((f'(t))^2 - f^2(t)K(\dot{\gamma}, Z)) dt. \quad (4.3.3)$$

## 4.4 Le Théorème de Bonnet-Myers.

**Théorème 4.4.1 (Bonnet-Myers)** Soit  $(M, g)$  une variété Riemannienne complète et connexe de courbure de Ricci  $\geq a^2(n-1) > 0$ , c'est-à-dire

$$\text{Ric}(X, X) \geq a^2(n-1)\|X\|^2.$$

Alors le diamètre de  $(M, g)$  vérifie  $\text{diam}(M, g) \leq \frac{\pi}{a}$ , en particulier  $M$  est compact.

Ce théorème a été démontré pour les surfaces par O. Bonnet vers 1850 (en réalité il ne considérait que le cas des ellipsoïdes) et par S.B. Myers en 1941 dans le cas général.

**Démonstration.** Rappelons que le diamètre de  $M$  est défini par

$$\text{diam}(M, g) = \sup\{d(p, q) \mid p, q \in M\}.$$

Considérons deux points quelconques  $p, q \in M$  et notons  $\ell = d(p, q)$  leur distance. Par le théorème de Hopf-Rinow, on sait qu'il existe une géodésique  $\gamma : [0, \ell] \rightarrow M$  de longueur  $\ell$  reliant  $p$  à  $q$ . On suppose cette géodésique unitaire ( $\|\dot{\gamma}\| = 1$ ).

Donnons nous un repère mobile orthonormé parallèle  $E_1, \dots, E_{n-1}, E_n \in \Gamma_\gamma$  le long de  $\gamma$  tel que  $E_n = \dot{\gamma}$ . On a donc

$$\langle E_i, E_j \rangle = \delta_{ij} \quad \text{et} \quad \nabla_t E_i = 0.$$

Posons

$$\phi_i(t, s) = \exp_{\gamma(t)} \left( s \sin \left( \frac{\pi}{\ell} t \right) E_i \right)$$

pour  $i = 1, \dots, (n - 1)$ . C'est une variation de  $\gamma$  à extrémités fixées et on a vu plus haut (4.3.3) que

$$\frac{d^2}{ds^2} \Big|_{i,s=0} \ell(\phi_s) = \int_0^\ell \left( \left( \frac{\pi}{\ell} \right)^2 \cos^2 \left( \frac{\pi}{\ell} t \right) - \sin^2 \left( \frac{\pi}{\ell} t \right) K(\dot{\gamma}, E_i) \right) dt.$$

Or

$$\int_0^\ell \cos^2 \left( \frac{\pi}{\ell} t \right) dt = \int_0^\ell \sin^2 \left( \frac{\pi}{\ell} t \right) dt = \frac{\ell}{2},$$

par conséquent

$$\frac{d^2}{ds^2} \Big|_{i,s=0} \ell(\phi_{i,s}) = \int_0^\ell \left( \left( \frac{\pi}{\ell} \right)^2 - K(\dot{\gamma}, E_i) \right) \sin^2 \left( \frac{\pi}{\ell} t \right) dt.$$

Mais  $\ell(\phi_{i,s})$  atteint son minimum en  $s = 0$ , donc  $\frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} \ell(\phi_{i,s}) \geq 0$  pour tout  $i = 1, \dots, (n - 1)$ . On obtient donc en sommant l'identité précédente pour  $i = 1, \dots, n - 1$  :

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} \ell(\phi_{i,s}) \leq \int_0^\ell \left( (n-1) \left( \frac{\pi}{\ell} \right)^2 - \sum_{i=1}^{n-1} K(\dot{\gamma}, E_i) \right) \sin^2 \left( \frac{\pi}{\ell} t \right) dt.$$

Or, par hypothèse,

$$\sum_{i=1}^{n-1} K(\dot{\gamma}, E_i) = \text{Ric}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) \geq a^2(n-1).$$

(car  $\|\dot{\gamma}\| = 1$ ). Par conséquent

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^\ell \left( (n-1) \left( \frac{\pi}{\ell} \right)^2 - \text{Ric}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) \right) \sin^2 \left( \frac{\pi}{\ell} t \right) dt \\ &\leq (n-1) \left( \left( \frac{\pi}{\ell} \right)^2 - a^2 \right) \int_0^\ell \sin^2 \left( \frac{\pi}{\ell} t \right) dt \\ &= \frac{(n-1)\ell}{2} \left( \left( \frac{\pi}{\ell} \right)^2 - a^2 \right). \end{aligned}$$

On a donc montré que  $\left( \frac{\pi}{\ell} \right)^2 - a^2 \geq 0$ , ou, de façon équivalente,

$$d(p, q) = \ell \leq \frac{\pi}{a}.$$

Comme  $p$  et  $q$  sont des points arbitraires de  $M$ , on a  $\text{diam}(M) \leq \frac{\pi}{a}$ . □

**Remarques 1.** Le théorème de Bonnet-Myers est optimal car la sphère dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  de rayon  $r = 1/a$  est de courbure sectionnelle constante  $a^2$ , donc de courbure de Ricci constante  $= (n-1)a^2$  et son diamètre est exactement  $\pi/a = \pi r$ .

**2.** Si  $(M, g)$  vérifie les hypothèse du théorème de Bonnet-Myers, alors c'est aussi le cas de son revêtement universel  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  (avec la métrique  $\tilde{g}$  induite par la projection  $\tilde{M} \rightarrow M$ ). On en déduit que  $\tilde{M}$  est aussi compact et donc que le groupe fondamental  $\pi_1(M)$  est fini. On a ainsi démontré que *si la variété  $M$  a un groupe fondamental infini, alors elle n'admet pas de métrique complète à courbure de Ricci  $\geq a > 0$ .*

Par exemple un tore  $T^n$  n'admet aucune métrique à courbure de Ricci positive.

## 4.5 Champs de Jacobi et applications

**Definition.** Soit  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  une géodésique de  $(M, g)$ . Un *champ de Jacobi* le long de  $\gamma$  est un champ  $Z \in \Gamma_\gamma$  tel que

$$(\nabla_t)^2 Z + R(Z, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0 \quad (\text{équation de Jacobi}).$$

L'*opérateur de Jacobi* est l'endomorphisme  $J_\gamma : \Gamma_\gamma \rightarrow \Gamma_\gamma$  agissant sur les champs de vecteurs le long de  $\gamma$  défini par

$$J_\gamma(Z) := (\nabla_t)^2 Z + R(Z, \dot{\gamma})\dot{\gamma}$$

$Z$  est donc un champ de Jacobi si et seulement si  $J_\gamma(Z) = 0$ .

La formule de variation seconde peut se réécrire sous la forme suivante :

**Théorème 4.5.1** Si  $\phi : [0, 1] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  est une variation de la géodésique  $\gamma$ , alors

$$\frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} \ell(\phi_s) = \frac{1}{\ell} \left\{ \left( \langle \nabla_Y Y, \dot{\gamma} \rangle + \langle \nabla_t Y^\perp, Y^\perp \rangle \right) \Big|_{t=0}^1 - \int_0^1 \langle J(Y^\perp), Y^\perp \rangle dt \right\},$$

où  $\ell = \ell(\gamma)$  et  $Y = \frac{\partial \phi}{\partial s}$ .

Nous laissons la preuve en exercice.

### Exemples de champs de Jacobi

Pour toute géodésique  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ , le champ de vitesse  $Z = \dot{\gamma}$  est trivialement un champ de Jacobi.

Un autre exemple simple est le cas de  $\mathbb{R}^n$ . En identifiant  $T_{\gamma(t)}\mathbb{R}^n$  à  $\mathbb{R}^n$ , on peut considérer que tout champ de vecteurs le long de  $\gamma$  est déterminé par une fonction  $Z \in C^\infty([a, b], \mathbb{R}^n)$ . La dérivée covariante est alors la dérivée usuelle et la courbure est nulle. L'équation de Jacobi se réduit ainsi à

$$\frac{d^2}{dt^2} Z_t = 0.$$

Les champs de Jacobi d'une géodésique de  $\mathbb{R}^n$  sont donc les champs  $Z_t = V + tW$  avec  $V, W \in \mathbb{R}^n$  constants.

La proposition suivante détermine tous les champs de Jacobi.

**Proposition 4.5.2** Soit  $\gamma$  soit une géodésique et  $Z \in \Gamma_\gamma$  soit un champ de vecteurs le long de  $\gamma$ . Alors  $Z$  est un champ Jacobi si et seulement s'il existe une variation  $\phi : [0, 1] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  de  $\gamma$  par des géodésiques pour lesquelles  $Z = \frac{\partial \phi(t, s)}{\partial s}$ .

**Preuve.** Si  $t \rightarrow \phi(t, s)$  est géodésique pour tout  $s$ , alors  $\nabla_t \frac{\partial \phi}{\partial t} \equiv 0$ . On a donc

$$R \left( \frac{\partial \phi}{\partial s}, \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \frac{\partial \phi}{\partial t} = \nabla_s \nabla_t \frac{\partial \phi}{\partial t} - \nabla_t \nabla_s \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\nabla_t \nabla_s \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\nabla_t \nabla_t \frac{\partial \phi}{\partial s}$$

car  $\nabla_t \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$  et  $\nabla_s \frac{\partial \phi}{\partial t} = \nabla_t \frac{\partial \phi}{\partial s}$ . Par conséquent on a  $J\left(\frac{\partial \phi}{\partial s}\right) = 0$ .

Réciproquement soit  $Z$  un champ de Jacobi non nul le long de  $\gamma$ . Supposons sans perdre de généralité que  $Z_0 \neq 0$  et posons  $p = \gamma(0)$ . Notons  $\alpha(s) = \exp_p(sZ_0)$  la géodésique issue de  $p$  en direction de  $Z_0$ .

Considérons les champs de vecteurs parallèles  $V, W \in \Gamma_\alpha$  tels que  $V_0 = \dot{\gamma}(0)$  et  $W_0 = \nabla_0 Z$ . On définit alors

$$\psi(t, s) = \exp_{\alpha(s)}(t(V_s + sW_s)).$$

Alors pour chaque valeur de  $s$ ,  $\psi_s : t \rightarrow \psi(t, s)$  est une géodésique et  $\psi(t, 0) = \exp_p(t\dot{\gamma}(0)) = \gamma(t)$ . Il s'agit donc d'une variation de  $\gamma$  par des géodésiques et par conséquent

$$Z = \left. \frac{\partial \psi}{\partial s} \right|_{s=0}$$

est un champ de Jacobi. □

Les champs de Jacobi sont un outil puissant en géométrie riemannienne car ils relient le tenseur de courbure à l'étude des géodésiques, mettant en évidence l'influence de la courbure sur le comportement des géodésiques. En particulier, nous pouvons utiliser les champs Jacobi pour calculer des courbures.

### Application aux surfaces

Soit  $(u, v)$  un système de coordonnées locales sur une surface riemannienne  $(M, g)$  tel que

$$g = du^2 + b^2(u, v)dv^2.$$

Considérons le repère mobile orthonormé déterminé par

$$E_1 = \frac{1}{b(u, v)} \frac{\partial}{\partial v}, \quad E_2 = \frac{\partial}{\partial u},$$

les droites horizontales  $v = \text{cte.}$  sont des géodésiques, par conséquent les champs  $E_1, E_2$  sont parallèles le long de chacune de ces géodésiques :

$$\nabla_{E_1} E_1 = \nabla_{E_1} E_2 = 0.$$

De plus  $\frac{\partial}{\partial v} = bE_1$  est un champ de Jacobi le long des géodésiques  $v = \text{cte.}$  On a donc

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_u^2 \left( \frac{\partial}{\partial v} \right) + R \left( \frac{\partial}{\partial v}, E_2 \right) E_2 \\ &= \nabla_{E_1}^2 (bE_2) + bR(E_2, E_2)E_2 \\ &= \frac{\partial^2 b}{\partial u^2} E_2 + bR(E_2, E_2)E_2. \end{aligned}$$

En faisant le produit scalaire avec  $E_2$ , on trouve

$$\frac{\partial^2 b}{\partial u^2} + Kb = 0,$$

où  $K = K(E_1, E_2)$  est la courbure sectionnelle. On retrouve donc la formule connue pour la courbure de la métrique  $g = du^2 + b^2 dv^2$  :

$$K = -\frac{1}{b} \frac{\partial^2 b}{\partial u^2}.$$

## 4.6 Le théorème de Cartan-Hadamard

Le théorème de Cartan-Hadamard (aussi appelé théorème de Cartan-Hadamard-Mangolte) nous informe sur la topologie des variétés riemanniennes à courbure sectionnelle négative ou nulle. On peut le voir comment un pendant au théorème de Bonnet-Myers. On commence par l'énoncé suivant :

**Proposition 4.6.1** *Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne à courbure sectionnelle négative ou nulle, ( $K \leq 0$ ), et soit  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  une géodésique de  $M$ . Alors pour tout champ de Jacobi  $Z$  le long de  $\gamma$ , la fonction*

$$t \rightarrow \|Z_t\|$$

*est convexe.*

**Preuve.** La condition  $K \leq 0$  signifie que pour tout  $p \in M$  et tous  $X, Y \in T_p M$  on a  $\langle R(X, Y)Y, X \rangle \leq 0$ . Donc si  $Z$  est un champ de Jacobi, on a

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \|Z_t\|^2 &= 2 \frac{d}{dt} \langle \nabla_t Z, Z \rangle \\ &= 2 \langle (\nabla_t)^2 Z, Z \rangle + 2 \|\nabla_t Z\|^2 \\ &= -2 \langle R(Z, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, Z \rangle + 2 \|\nabla_t Z\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

On utilise maintenant l'identité

$$\frac{d^2}{dt^2} \sqrt{h} = \frac{hh'' - \frac{1}{2}h'^2}{2h^{3/2}},$$

avec  $h(t) = \|Z_t\|^2$ . On obtient alors

$$\frac{d^2}{dt^2} \|Z_t\| = \frac{-\|Z\|^2 \langle R(Z, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, Z \rangle + \|Z\|^2 \|\nabla_t Z\|^2 - \langle \nabla_t Z, Z \rangle^2}{\|Z\|^3}.$$

Mais par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a  $\|Z\|^2 \|\nabla_t Z\|^2 - \langle \nabla_t Z, Z \rangle^2 \geq 0$ , et on conclut donc que  $\frac{d^2}{dt^2} \|Z_t\| \geq 0$ . □

**Théorème 4.6.2** *Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne connexe complète à courbure sectionnelle non positive, i.e.  $K(\Pi) \leq 0$  pour tout point  $p \in M$  et tout 2-plan  $\Pi \subset T_p M$ . Alors l'application  $\exp_p : T_p M \rightarrow M$  vérifie*

$$\|d(\exp_p)_v(w)\| \geq \|w\|, \tag{4.6.1}$$

*pour tout point  $p \in M$ , et tous  $v, w \in T_p M$ . En particulier  $\exp_p : T_p M \rightarrow M$  est un difféomorphisme local.*

**Preuve.** Pour alléger les notations on note  $f := \exp_p : T_p M \rightarrow M$  l'application exponentielle basée en  $p$ , C'est une application différentiable et l'inégalité (4.6.1) à prouver dit que  $df_v : T_v(T_p M) \rightarrow T_{f(v)} M$  dilate les longueurs pour tout  $v \in T_p M$ , c'est-à-dire

$$\|df_v(w)\| \geq \|w\|.$$

pour tout  $w \in T_v(T_p M)$ . On simplifie la discussion si on identifie  $T_v(T_p M)$  et que l'on considère que  $w$  est un élément de  $T_p M$ . Les champs de Jacobi vont nous permettre d'établir cette inégalité. On pose

$$\varphi(t, s) := f(t(v + sw)) = \exp_p(t(v + sw)).$$

Observons que pour tout  $s$ , la courbe  $t \mapsto \varphi(t, s)$  est géodésique et que pour  $s = 0$ , il s'agit de la géodésique engendrée par le vecteur  $v$ . Le champ de vecteurs  $Y = \frac{\partial \varphi}{\partial s}$  est donc un champ de Jacobi le long de cette géodésique.

Fixons maintenant  $t = 1$ , alors  $s \mapsto \varphi(1, s)$  est une courbe qui passe par  $f(v)$  en  $s = 0$  et on a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s}(1, 0) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} f(v + sw) = df_v(w).$$

On a donc calculé la différentielle de l'application exponentielle.

Par la proposition précédente, la fonction  $a(t) = \|\frac{\partial \varphi}{\partial s}(0, t)\|$  vérifie  $a''(t) \geq 0$ . Comme la différentielle de  $\exp_p$  en  $p$  est l'identité, on a  $a(0) = 0$  et  $a'(0) = \|w\|$  (écrire les choses en coordonnées normales pour le voir). Ces conditions entraînent que  $a(1) \geq \|w\|$ . On a donc

$$\|df_v(w)\| = a(1) \geq \|w\|.$$

Qui est équivalente à (4.6.1). Cette inégalité entraîne en particulier que  $df_v$  est injective pour tout  $v \in T_p M$  et comme  $\dim(T_p M) = \dim(M)$ , le théorème d'inversion locale entraîne que  $f$  est un difféomorphisme local. □

## Digression sur les revêtements

**Définition.** Soit  $f : \tilde{M} \rightarrow M$  une application continue entre deux variétés. On dit que  $f$  est un *revêtement* si tout point  $p$  de  $M$  admet un voisinage ouvert  $U \subset M$  dont la préimage s'écrit

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} U_i$$

où  $I$  est un ensemble (non vide) d'indices et les  $U_i \subset \tilde{M}$  sont des ouverts deux-à-deux disjoints tels que pour tout  $i$  la restriction

$$f_i = f|_{U_i} : U_i \rightarrow U$$

est un homéomorphisme pour tout  $i \in I$ .

**Exemples 1.)** Si  $\tilde{M} = M \times I$  et que  $I$  est muni de la topologie discrète, alors la projection  $f(x, i) = x$  de  $\tilde{M}$  sur  $M$  est un revêtement.

- 2.) La projection canonique  $\pi : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n = \mathbb{S}^n / \pm 1$  est un revêtement.
- 3.) On note  $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ , alors  $z \mapsto z^d$  est un revêtement pour tout  $d \in \mathbb{N}$ .
- 4.) L'application  $t \mapsto e^{it}$  est un revêtement  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ .
- 5.) L'application  $z \mapsto e^z$  est un revêtement  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ .
- 6.) Le produit cartésien de deux revêtements est un revêtement.

Le résultat suivant résume quelques propriétés importantes des revêtements :

**Théorème 4.6.3**  $f : \tilde{M} \rightarrow M$  un revêtement, alors

- a.) Si  $\tilde{M}$  est connexe et  $M$  est simplement connexe, alors  $f$  est un homéomorphisme.
- b.) Si  $M$  est connexe, alors il existe une variété simplement connexe  $\tilde{M}$  et un revêtement  $f : \tilde{M} \rightarrow M$ . De plus il existe un groupe  $G \subset \text{Homeo}(\tilde{M})$  qui agit librement (sans point fixe) et de façon proprement discontinue, et qui vérifie pour tous  $x, y \in \tilde{M}$  :

$$f(x) = f(y) \quad \Leftrightarrow \quad \text{il existe } g \in G \text{ tel que } y = gx.$$

De plus  $G$  est isomorphe au groupe fondamental de  $M$  :  $G \cong \pi_1(M, x_0)$ .

**Remarque.** On dit que le groupe  $G \subset \text{Homeo}(\tilde{M})$  agit de façon proprement discontinue sur  $\tilde{M}$  si pour tout compact  $K \subset \tilde{M}$  on a

$$\{g \in G \mid gK \cap K \neq \emptyset\} \subset G \text{ est un ensemble fini.}$$

Le revêtement simplement connexe du point (b) s'appelle le *revêtement universel* de  $M$ . Il est unique à homéomorphisme près et la variété  $M$  est donnée comme quotient  $M = \tilde{M}/G$ .



On a la propositions suivante qui relie les isométries locales et les revêtements :

**Proposition 4.6.4** *Soit  $f : N \rightarrow M$  une application entre deux variétés riemanniennes (sans bord)  $(N, h)$  et  $(M, g)$ . On suppose que  $N$  est connexe et que  $M$  est complète. Si  $f$  est une isométrie locale, alors  $f$  est un revêtement.*

**Exercice.** Trouver un exemple d' isométrie locale surjective  $f : N \rightarrow M$  qui n'est pas un revêtement (il faut bien sûr que  $N$  ne soit pas complète).

**Théorème 4.6.5 (Cartan-Hadamard)** *Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne connexe complète à courbure sectionnelle non positive,  $K(\Pi) \leq 0$ . Alors  $\exp_p : T_p M \rightarrow M$  est un revêtement pour tout point  $p \in M$ .*

**Démonstration.** On note  $f := \exp_p : T_p M \rightarrow M$  l'application exponentielle basée en  $p$ , on a vu que  $f$  est un difféomorphisme local. On définit maintenant une nouvelle métrique riemannienne  $h$  sur  $N = T_p M$  par  $h = f^*g$ , i.e.

$$h_v(w_1, w_2) = g_{f(v)}(df_v(w_1), df_v(w_2)).$$

Notons  $d^h$  la distance associée à la métrique  $h$  sur  $N$  et  $d^0$  la distance euclidienne sur  $N$  (provenant du produit scalaire  $g_p$ ). Par le théorème 4.6.2, on sait que  $d^h(w_1, w_2) \geq d^0(w_1, w_2)$ . Il est facile de déduire de cette inégalité que toute suite de Cauchy de  $(N, d^h)$  est aussi une suite de Cauchy de  $(N, d^0)$ , donc toute suite Cauchy de  $(N, d^h)$  converge (car  $(N, d^0)$  est complet puisque c'est un espace euclidien).

Ainsi  $(N, h)$  est une variété riemannienne complète et par construction  $f : (N, h) \rightarrow (M, g)$  est une isométrie locale. Par la proposition précédente on conclut que  $f$  est un revêtement. □

On conclut par quelques conséquences importantes du théorème de Cartan-Hadamard :

**Corollaire 4.6.6** *Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne connexe complète telle que  $K \leq 0$ , alors*

- i.) Si  $M$  est simplement connexe, alors  $M$  est difféomorphe à  $\mathbb{R}^n$ .*
- ii.) Dans le cas général, le revêtement universel de  $M$  est difféomorphe à  $\mathbb{R}^n$ .*
- iii.) Si  $M$  est compact, alors le groupe fondamental de  $M$  est infini.*

Ce corollaire a pour conséquence que *si  $M$  est une variété compact dont le groupe fondamental est fini, alors  $M$  n'admet aucune métrique telle que  $K \leq 0$ .*

Un espace topologique dont le revêtement universel est contractile s'appelle un *espace de Eilenberg- Mac Lane*. Le théorème de Cartan-Hadamard nous dit en particulier que toute variété riemannienne connexe complète à courbure  $K \leq 0$  est un espace de Eilenberg- Mac Lane.

Dans le cas des variétés à courbure constante, on a

**Corollaire 4.6.7** Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne connexe complète à courbure constante  $K = 0$  ou  $K = -1$ .

- Si  $K = 0$ , il existe un groupe d'isométries  $G \subset \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$  agissant de façon libre et proprement discontinue sur  $\mathbb{R}^n$  tel que  $M$  est isométrique à  $\mathbb{R}^n/G$ .
- Si  $K = -1$ , il existe un groupe d'isométries  $G \subset \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  agissant de façon libre et proprement discontinue sur  $\mathbb{H}^n$  tel que  $M$  est isométrique à  $\mathbb{H}^n/G$ .

Ce résultat peut aussi être démontré en utilisant la théorie des structures géométriques localement homogènes  $((G, X)$ -structures. Le résultat correspondant est aussi vrai en courbure positive  $K = +1$  (mais il ne se déduit pas du théorème de Cartan-Hadamard).

## 4.7 Repère mobile sur une surface

**Définitions a.)** Soit  $U$  un ouvert d'une surface Riemannienne  $(S, g)$ . On dit que deux champs de vecteurs  $E_1, E_2 \in \Gamma(U)$  sur  $U$  forment un *repère mobile orthonormé* si  $\{E_1(p), E_2(p)\}$  forme une base orthonormée du plan tangent  $T_p S$  pour tout point  $p \in U$ , c'est-à-dire  $g(E_i, E_j) = \delta_{ij}$ .

**b.)** Le *corepère mobile associé* est la donnée des 1-formes  $\theta^1, \theta^2 \in \Gamma^*(U)$  formant en tout point la base duale, c'est-à-dire

$$\theta^i(E_j) = \delta_j^i.$$

De façon équivalente,  $\theta^i(X) = g(X, E_i)$  pour tout vecteur  $X$ .

**c.)** La *forme de connexion* associée au repère mobile  $\{E_1(p), E_2(p)\}$  est la 1-forme  $\omega \in \Gamma^*(U)$  définie par

$$\omega(X) = \theta^2(\nabla_X E_1) = g(\nabla_X E_1, E_2)$$

où  $\nabla$  est la connexion de Levi-Civita de la métrique  $g$ .

**Lemme 4.7.1** Nous avons les propriétés suivantes :

*i.)* La forme de connexion est aussi donnée par

$$\omega(X) = -\theta^1(\nabla_X E_2) = -g(\nabla_X E_2, E_1)$$

*ii.)* Sur l'ouvert  $U$ , on a

$$g = \theta^1 \otimes \theta^1 + \theta^2 \otimes \theta^2 = (\theta^1)^2 + (\theta^2)^2.$$

*iii.)* Si la surface est orientée et le repère est d'orientation positive, alors l'élément d'aire s'écrit sur  $U$

$$dA = \theta^1 \wedge \theta^2.$$

*iv.)* On a

$$\nabla_X E_1 = \omega(X)E_2 \quad \text{et} \quad \nabla_X E_2 = -\omega(X)E_1.$$

**Preuve.** (i.) La première affirmation découle de

$$0 = X(g(E_1, E_2)) = g(\nabla_X E_1, E_2) + g(E_1, \nabla_X E_2).$$

(ii.) On vérifie l'égalité pour les vecteurs  $X = E_i$  et  $Y = E_j$  :

$$(\theta^1 \otimes \theta^1 + \theta^2 \otimes \theta^2)(E_i, E_j) = \theta^1(E_i)\theta^1(E_j) + \theta^2(E_i)\theta^2(E_j) = \delta_{ij} = g(E_i, E_j).$$

(iii.) Fixons un point  $p \in U$ , et donnons-nous des coordonnées  $x^1, x^2$  telles que en  $p$  on a  $E_1(p) = \frac{\partial}{\partial x^1}$  et  $E_2(p) = \frac{\partial}{\partial x^2}$ . Alors en ce point on a  $g_p = (dx^1)^2 + (dx^2)^2$  et donc

$$dA = dx^1 \wedge dx^2 = \theta^1 \wedge \theta^2$$

comme  $p \in U$  est arbitraire, l'équation en (iii) est vérifiée en tout point de  $p$ .

(iv.) On a pour tout champ de vecteurs  $X \in \Gamma(U)$

$$0 = X(g(E_1, E_1)) = 2g(\nabla_X E_1, E_1),$$

donc  $\nabla_X E_1 \perp E_1$ , ce qui entraîne que  $\nabla_X E_1$  est un multiple de  $E_2$  et donc

$$\nabla_X E_1 = g(\nabla_X E_1, E_1)E_1 + g(\nabla_X E_1, E_2)E_2 = g(\nabla_X E_1, E_2)E_2 = \omega(X)E_2.$$

L'autre égalité se prouve de la même façon.

□

**Théorème 4.7.2 (Equations de structures de Elie Cartan)** *Le corepère mobile et la forme de connexion vérifient les équations suivantes :*

$$\begin{aligned} d\theta^1 &= \omega \wedge \theta^2 \\ d\theta^2 &= -\omega \wedge \theta^1 \\ d\omega &= -K\theta^1 \wedge \theta^2, \end{aligned}$$

où  $K$  est la courbure de la métrique  $g$ .

**Preuve.** On commence par prouver la première équation. On a

$$\omega \wedge \theta^2(E_1, E_2) = \omega(E_1)\theta^2(E_2) - \omega(E_2)\theta^2(E_1) = \omega(E_1).$$

D'autre part, on a pour tous  $X, Y \in \Gamma(U)$

$$\begin{aligned} d\theta^1(X, Y) &= X(\theta^1(Y)) - Y(\theta^1(X)) - \theta^1([X, Y]) \\ &= X(g(E_1, Y)) - Y(g(E_1, X)) - g(E_1, [X, Y]) \\ &= g(\nabla_X E_1, Y) + g(E_1, \nabla_X Y) - g(\nabla_Y E_1, X) - g(E_1, \nabla_Y X) - g(E_1, [X, Y]) \\ &= g(\nabla_X E_1, Y) - g(\nabla_Y E_1, X) + g(E_1, \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]) \\ &= g(\nabla_X E_1, Y) - g(\nabla_Y E_1, X) \end{aligned}$$

car  $\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0$ . En particulier on a

$$d\theta^1(E_1, E_2) = g(\nabla_{E_1} E_1, E_2) - \underbrace{g(\nabla_{E_2} E_1, E_1)}_{=0} = \omega(E_1).$$

On a donc démontré que  $d\theta^1(E_1, E_2) = \omega \wedge \theta^2(E_1, E_2)$ , et comme une 2-forme sur une surface  $S$  est déterminée par la valeur qu'elle prend en chaque point  $p$  sur une base de  $T_p S$ , on en déduit que  $d\theta^1 = \omega \wedge \theta^2$ .

La deuxième équation de structure se prouve de la même manière. Pour prouver la troisième équation on calcule

$$\begin{aligned} d\omega(X, Y) &= X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]) \\ &= X(g(\nabla_Y E_1, E_2)) - Y(g(\nabla_X E_1, E_2)) - g(\nabla_{[X, Y]} E_1, E_2) \\ &= g(\nabla_X \nabla_Y E_1, E_2) + g(\nabla_Y E_1, \nabla_X E_2) \\ &\quad - g(\nabla_Y \nabla_X E_1, E_2) - g(\nabla_X E_1, \nabla_Y E_2) - g(\nabla_{[X, Y]} E_1, E_2) \\ &= g(R(X, Y)E_1, E_2) \end{aligned}$$

car

$$g(\nabla_Y E_1, \nabla_X E_2) = \omega(Y)g(E_2, \nabla_X E_2) = -\omega(X)\omega(Y)g(E_2, E_1) = 0,$$

et de même  $g(\nabla_X E_1, \nabla_Y E_2) = 0$ .

Rappelons que la courbure sectionnelle de  $g$  est donnée en tout point par

$$K = R(E_2, E_1, E_1, E_2) = -R(E_1, E_2, E_1, E_2) = -g(R(E_1, E_2)E_1, E_2).$$

On a donc

$$d\omega(E_1, E_2) = g(R(E_1, E_2)E_1, E_2) = -K = -K\theta^1 \wedge \theta^2(E_1, E_2).$$

La troisième équation est démontrée. □

**Exemple.** Supposons que la métrique s'écrive dans un système de coordonnées sous la forme

$$g = a^2(x, y)dx^2 + b^2(x, y)dy^2.$$

Alors un repère mobile est donné par  $E_1 = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $E_2 = \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial y}$ . Le corepère associé est  $\theta^1 = adx$ ,  $\theta^2 = bdy$ . Cherchons la forme de connexion sous la forme

$$\omega = Pdx + Qdy.$$

Les deux premières équations de structures imposent

$$\omega \wedge \theta^2 = Pb dx \wedge dy = d\theta^1 = -\frac{\partial a}{\partial y} dx \wedge dy$$

et

$$\omega \wedge \theta^1 = -Qa dx \wedge dy = -d\theta^2 = -\frac{\partial b}{\partial x} dx \wedge dy,$$

donc

$$\frac{\partial a}{\partial y} = -Pb \quad \text{et} \quad \frac{\partial b}{\partial x} = Qa,$$

c'est-à-dire

$$\omega = -\frac{1}{b} \frac{\partial a}{\partial y} dx + \frac{1}{a} \frac{\partial b}{\partial x} dy.$$

La différentielle extérieure de  $\omega$  est

$$d\omega = \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{a} \frac{\partial b}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{b} \frac{\partial a}{\partial y} \right) \right) dx \wedge dy.$$

L'élément d'aire est

$$dA = \theta^1 \wedge \theta^2 = ab \, dx \wedge dy,$$

la troisième équation de structure nous donne alors la courbure sous la forme

$$K = -\frac{1}{ab} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{a} \frac{\partial b}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{b} \frac{\partial a}{\partial y} \right) \right]. \quad (4.7.1)$$

## 4.8 La courbure géodésique

La *courbure géodésique* d'une courbe  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  de classe  $C^2$  paramétrée naturellement (i.e. à vitesse constante  $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$  pour tout  $t \in [a, b]$ ) dans une variété riemannienne  $(M, g)$  est la norme de son accélération covariante. On note cette courbure

$$k_\gamma(t) = \|\nabla_t \dot{\gamma}\|.$$

Il est clair que  $\gamma$  est géodésique si et seulement si sa courbure géodésique est identiquement nulle. Dans le cas d'une surface orientée, on peut associer un signe à la courbure géodésique d'une courbe sur ladite surface. Ce signe permet de distinguer les courbes concave des courbes convexes.

**Définition.** Soit  $(S, g)$  une surface riemannienne orientée et  $\gamma : [a, b] \rightarrow S$  une courbe de classe  $C^2$  paramétrée naturellement. La *courbure géodésique orientée* de  $\gamma$  est définie par

$$\kappa_\gamma(t) = \langle \nabla_t \dot{\gamma}, \dot{\gamma}(t)^\perp \rangle,$$

où  $\dot{\gamma}(t)^\perp$  est le champ de vecteur le long de  $\gamma$  tel que pour tout  $t \in [a, b]$ ,  $\{\dot{\gamma}, \dot{\gamma}(t)^\perp\}$  est une base orthonormée d'orientation positive du plan tangent  $T_{\dot{\gamma}(t)}S$  (de façon équivalente,  $\dot{\gamma}(t)^\perp$  est la rotation de  $\dot{\gamma}(t)$  d'un angle de  $\pi/2$  dans le sens positif).

**Lemme 4.8.1** On a  $|\kappa_\gamma(t)| = \|\nabla_t \dot{\gamma}\|$  pour tout  $t \in [a, b]$ .

**Preuve.** Il suffit de vérifier que les vecteurs  $\nabla_t \dot{\gamma}$  et  $\dot{\gamma}(t)^\perp$  sont orthogonaux, or la condition  $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$  entraîne que

$$0 = \frac{d}{dt} \langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle = 2 \langle \nabla_t \dot{\gamma}, \dot{\gamma}(t) \rangle.$$

□

**Proposition 4.8.2** Soit  $E_1, E_2$  un repère mobile orthonormé d'orientation positive défini sur un ouvert  $U$  d'une surface riemannienne orientée  $(S, g)$ . Soit  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  une courbe de classe  $C^2$  paramétrée naturellement, notons  $a(t)$  l'angle entre  $E_1$  et le vecteur vitesse de cette courbe :

$$a(t) = \angle(\dot{\gamma}(t), E_1).$$

Alors

$$\frac{da}{dt} = \kappa_\gamma(t) - \omega(\dot{\gamma})$$

où  $\omega$  est la forme de connexion associée au repère mobile  $E_1, E_2$  et  $\kappa_\gamma$  est la courbure géodésique de  $\gamma$ .

**Preuve.** Nous avons par hypothèse  $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$ , donc par définition de la fonction  $a(t)$  on a

$$\dot{\gamma}(t) = \cos(a(t))E_1 + \sin(a(t))E_2.$$

et

$$\dot{\gamma}(t)^\perp = -\sin(a)E_1 + \cos(a)E_2.$$

L'accélération covariante de  $\gamma$  est alors donnée par

$$\nabla_t \dot{\gamma} = (-\sin(a)\dot{a}E_1 + \cos(a)\nabla_{\dot{\gamma}}E_1) + (\cos(a)\dot{a}E_2 + \sin(a)\nabla_{\dot{\gamma}}E_2).$$

Rappelons que

$$\nabla_{\dot{\gamma}}E_1 = \omega(\dot{\gamma})E_2, \text{ et } \nabla_{\dot{\gamma}}E_2 = -\omega(\dot{\gamma})E_1,$$

donc

$$\begin{aligned} \nabla_t \dot{\gamma} &= -(\dot{a} + \omega(\dot{\gamma}))\sin(a)E_1 + (\dot{a} + \omega(\dot{\gamma}))\cos(a)E_2 \\ &= (\dot{a} + \omega(\dot{\gamma}))\dot{\gamma}(t)^\perp. \end{aligned}$$

Finalement :

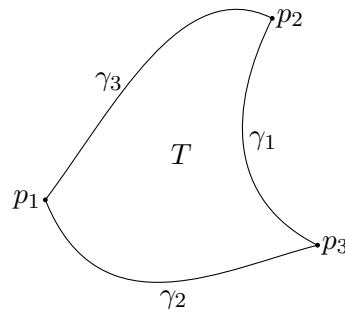
$$\kappa_\gamma(t) = \langle \nabla_t \dot{\gamma}, \dot{\gamma}(t)^\perp \rangle = \dot{a} + \omega(\dot{\gamma}).$$

□

## 4.9 Formule de Gauss-Bonnet pour un triangle.

La formule de Gauss-Bonnet pour un triangle  $T$  sur une surface Riemannienne  $(S, g)$  relie l'intégrale de la courbure dans ce triangle, les angles au sommets du triangle et l'intégrale de la courbure géodésique le long des côtés du triangle. Commençons par une définition.

**Définition.** Un *triangle* dans une surface riemannienne  $S$  est un domaine  $T \subset S$ , simplement connexe, dont le bord  $\partial T$  est une courbe de Jordan qui est de classe  $C^2$  sur le complémentaire de trois points distingués appelés *sommets* du triangle. Les arcs de courbes contenus dans  $\partial T$  et reliant deux sommets sont les *côtés* du triangle.



Considérons un tel triangle  $T$  contenu dans un ouvert  $U$  de  $S$  que nous pouvons supposer orienté sans perdre de généralité. Notons  $p_1, p_2, p_3 \in \partial T$  les trois sommets et  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  les angles correspondants. Munissons l'ouvert  $U$  d'un repère mobile orthonormé positivement orienté  $E_1, E_2$ . On se donne aussi les paramétrisations unitaires

$$\begin{cases} \gamma_1 : [t_0, t_1] \rightarrow \partial T & \text{reliant } p_2 \text{ à } p_3 \\ \gamma_2 : [t_1, t_2] \rightarrow \partial T & \text{reliant } p_3 \text{ à } p_1 \\ \gamma_3 : [t_2, t_3] \rightarrow \partial T & \text{reliant } p_1 \text{ à } p_2 \end{cases}$$

Notons pour  $i = 1, 2, 3$

$$a_i(t) = \angle(\dot{\gamma}_i(t), E_1),$$

alors

$$\int_{\partial T} \dot{a}(t) dt + ((\pi - \varphi_1) + (\pi - \varphi_2) + (\pi - \varphi_3)) = 2\pi,$$

car le vecteur  $\dot{\gamma}(t)$  subit un tour complet en parcourant le bord  $\partial T$ . Donc

$$\int_{\partial T} \dot{a}(t) dt = (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) - \pi.$$

Or  $\dot{a}(t) = \kappa_\gamma(t) - \omega(\dot{\gamma})$ , donc

$$\int_{\partial T} \kappa_\gamma(t) dt - \int_{\partial T} \omega = (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) - \pi.$$

Mais nous savons que  $d\omega = -K \, dA$ , la formule de Stokes nous donne alors le résultat suivant :

**Proposition 4.9.1** *L'intégrale de la courbure sur le triangle  $T$  vérifie*

$$\int_T K \, dA + \int_{\partial T} \kappa_\gamma(t) dt = (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) - \pi.$$

## 4.10 La formule de Gauss-Bonnet globale

Dans cette section, nous discutons la formule de Gauss-Bonnet pour les surfaces compactes sans bord. Pour cela nous avons besoins de quelques notions topologiques :

**Définitions. 1.** Une *triangulation* de la surface  $S$  est une collection finie de triangles  $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \dots, T_k\}$  (appelés les *faces* de la triangulation) et telles que

- i.)  $S = \cup_{i=1}^k T_i$ ;
- ii.) deux triangles distincts et non disjoints  $T_i$  et  $T_j$  se rencontrent en un sommet ou alors ils ont une arête commune.

**2.** La *caractéristique d'Euler* de la surface triangulée  $(S, \mathcal{T})$  est définie par

$$\chi(S, \mathcal{T}) = n_0 - n_1 + n_2,$$

où  $n_0$  est le nombre de sommets de la triangulation,  $n_1$  est le nombre d'arête et  $n_2$  est le nombre de face (i.e. le nombre de triangles).

L'existence de triangulations sur toute surface compacte a été démontrée par Tibor Radó dans les années 1920.

**Théorème 4.10.1 (Formule de Gauss-Bonnet)** *Pour toute triangulation de classe  $C^2$   $\mathcal{T}$  de la surface Riemannienne  $(S, g)$ , on a*

$$\int_S K dA = 2\pi\chi(S, \mathcal{T}),$$

où  $K$  est la courbure de la surface et  $dA$  est sa mesure d'aire.

**Remarque.** Une conséquence importante de cette remarque est que la caractéristique d'Euler de  $S$  est indépendante de la triangulation  $\mathcal{T}$ , il s'agit donc d'un invariant topologique de  $S$ . Ce fait est beaucoup plus général, pour tout espace topologique "raisonnable" (par exemple un CW-complexe on peut définir une caractéristique d'Euler et prouver que c'est un invariant topologique (la preuve utilise des techniques de topologie algébrique).

**Exemples.** La caractéristique d'Euler de la sphère  $S^2$  est égale à 2. La caractéristique d'Euler du plan projectif  $\mathbb{RP}^2$  est égale à 1, la caractéristique d'Euler du tore et de la bouteille de Klein sont nulles.

La caractéristique d'Euler d'une surface  $\sigma_g$  de genre  $g$  vaut

$$\chi(\sigma_g) = 2 - 2g.$$

**Démonstration du théorème.** Supposons d'abord que  $S$  est orientable et choisissons une triangulation de  $S$  telle que chaque triangle est de classe  $C^2$  par morceaux.

On a

$$\begin{aligned} \int_S K dA &= \sum_{i=1}^k \int_{T_i} K dA \\ &= -\sum_{i=1}^k \int_{\partial T_i} \kappa_\gamma(t) dt + \sum_{i=1}^k ((\varphi_{i_1} + \varphi_{i_2} + \varphi_{i_3}) - \pi). \end{aligned}$$

où  $\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}, \varphi_{i_3}$  sont les trois angles intérieurs du triangle  $T_i$ . On observe que chaque arête  $\gamma_{ij} = T_i \cap T_j$  de la triangulation est parcourue deux fois, avec orientation opposée (ici on utilise que  $\partial S = \emptyset$ ).

Il y a maintenant plusieurs choses à remarquer. Observons d'abord que lorsqu'on change le sens de parcours sur une courbe, la courbure géodésique change de signe, par conséquent la somme des intégrales de la courbure géodésique sur le bord de tous les triangles est nulle :

$$\sum_{i=1}^k \int_{\partial T_i} \kappa_\gamma(t) dt = 0.$$

La seconde remarque est que pour chaque sommet de la triangulation, la somme des angles incidents à ce sommet est égale à  $2\pi$ . Nous avons donc

$$\int_S K dA = \sum_{i=1}^k ((\varphi_{i_1} + \varphi_{i_2} + \varphi_{i_3}) - \pi) = 2\pi n_0 - \pi n_3.$$

Le troisième point à remarquer est la relation

$$3n_3 = 2n_1$$



qui exprime le fait que chaque triangle à trois côtés qui sont des arêtes de la triangulation et que chaque arête de la triangulation rencontre deux faces (on utilise encore que le bord est vide)

On a donc  $3n_3 - 2n_1 = 0$  et donc

$$\int_S K \, dA = 2\pi n_0 - \pi n_3 = 2\pi(n_0 - n_1 + n_3) = 2\pi\chi(S).$$

Dans le cas d'une surface non orientable, on sait qu'il existe un revêtement à deux feuillets  $\varpi : \tilde{S} \rightarrow S$  tel que  $\tilde{S}$  est orientable. On note  $\tilde{g} = \varpi^*(g)$  la métrique sur  $\tilde{S}$  induite par  $\varpi$ . On a alors (avec les notations évidentes)

$$\int_S K \, dA = 2 \cdot \int_{\tilde{S}} \tilde{K} \, d\tilde{A} = 4\pi\chi(\tilde{S}) = 2\pi\chi(S).$$

□

# Bibliography

- [1] J. Cheeger and D. Ebin, *Comparison theorems in Riemannian geometry*. Revised reprint of the 1975 original. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2008.
- [2] M. P. Do Carmo, *Riemannian Geometry*. Mathematics: Theory and Applications, Birkhäuser (1992).
- [3] S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine, *Riemannian Geometry*. Universitext, Springer, Third Edition (2004).
- [4] W. Klingenberg *Riemannian Geometry*. DeGruyter Studies in Mathematics Volume 1, DeGruyter Verlag , Berlin (1988)
- [5] S. Kobayashi and K. Nomizu *Foundation of Differential Geometry*. Wiley Interscience, New-York-London (1969)
- [6] J. M. Lee, *Riemannian manifolds. An introduction to curvature*. Graduate Texts in Mathematics, 176. Springer-Verlag, New York, 1997.
- [7] B. O'Neill, *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*. Pure and Applied Mathematics, 103. Academic Press, Inc. New York, 1983.
- [8] P. Petersen, *Riemannian Geometry*. Graduate Texts in Mathematics, 171 Springer.
- [9] M. Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry*. Publish or Peril, Inc., Boston, Mass. (3rd edition) 1999.

Remarque. Les livres de Do Carmo et J. M. Lee sont d'un niveau comparable au cours (celui de Do Carmo est légèrement plus avancé). Le livres de S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine, et celui de P. Petersen sont de bons choix pour poursuivre l'étude de la géométrie Riemannienne, mais chacun de ces textes offre une perspective intéressante.