

Information, Calcul et Communication

Module 2: Information et Communication Echantillonnage de signaux (2ème partie)

O. Lévêque – Faculté Informatique et Communications

Echantillonnage de signaux: rappel

Plan détaillé de ces deux leçons:

La semaine dernière:

- .. signaux, fréquences et bande passante
- .. filtrage
- .. échantillonnage

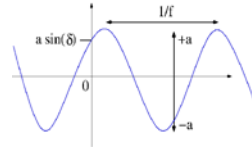
Aujourd'hui:

- .. bref rappel
- .. reconstruction
- .. théorème d'échantillonnage
- .. sous-échantillonnage

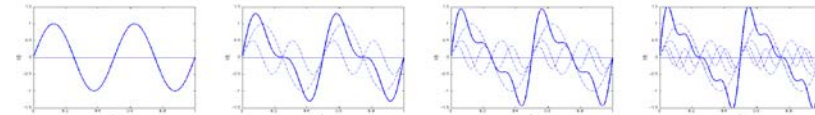
Echantillonnage de signaux: rappel



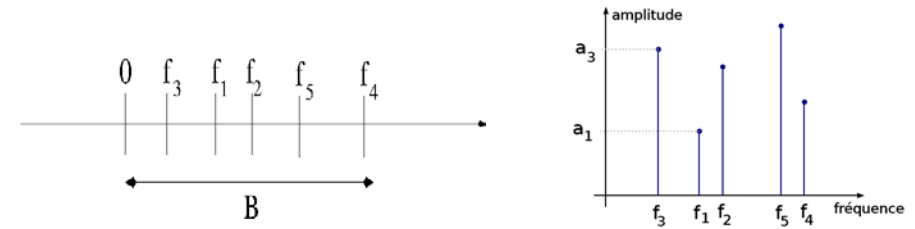
signal $(X(t), t \in \mathbb{R})$, ex: sinusoïde



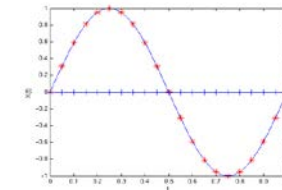
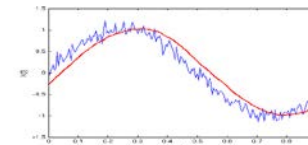
... “tout signal est une somme de sinusoïdes”



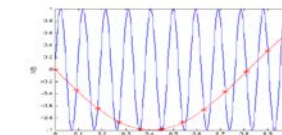
... fréquence(s) présente(s) dans un signal, bande passante et spectre



... filtre passe-bas idéal et filtre à moyenne mobile



... signal échantillonné $(X(nT_e), n \in \mathbb{Z})$: période T_e et fréquence f_e

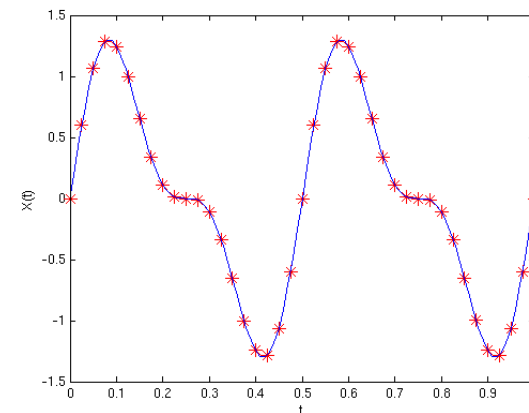
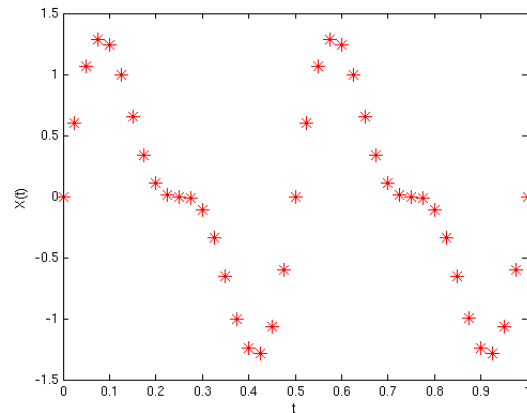


... condition nécessaire pour pouvoir reconstruire le signal: $f_e > 2f$

Reconstruction d'un signal

Comment reconstruire un signal $(X(t), t \in \mathbb{R})$
à partir de sa version échantillonnée $(X(nT_e), n \in \mathbb{Z})$?

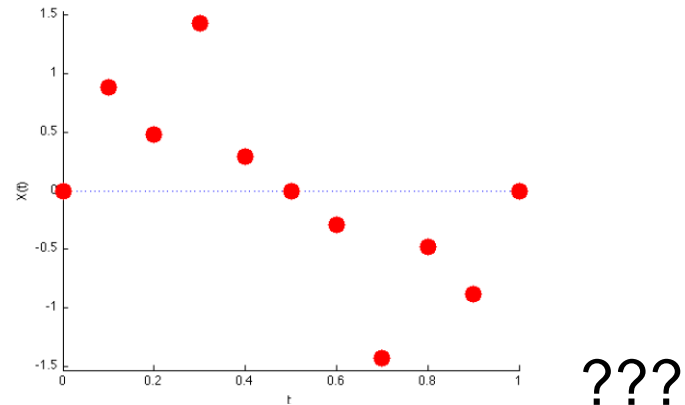
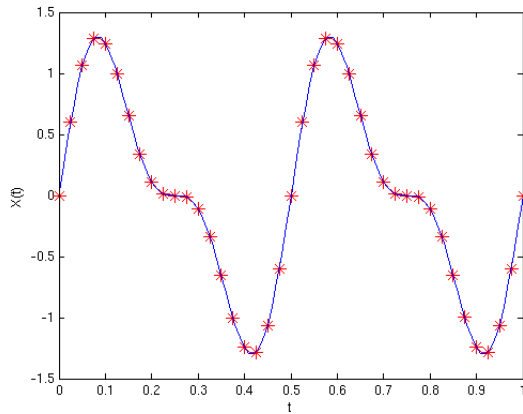
∴ Dans certains cas, c'est assez clair...



Reconstruction d'un signal

Comment reconstruire un signal $(X(t), t \in \mathbb{R})$
à partir de sa version échantillonnée $(X(nT_e), n \in \mathbb{Z})$?

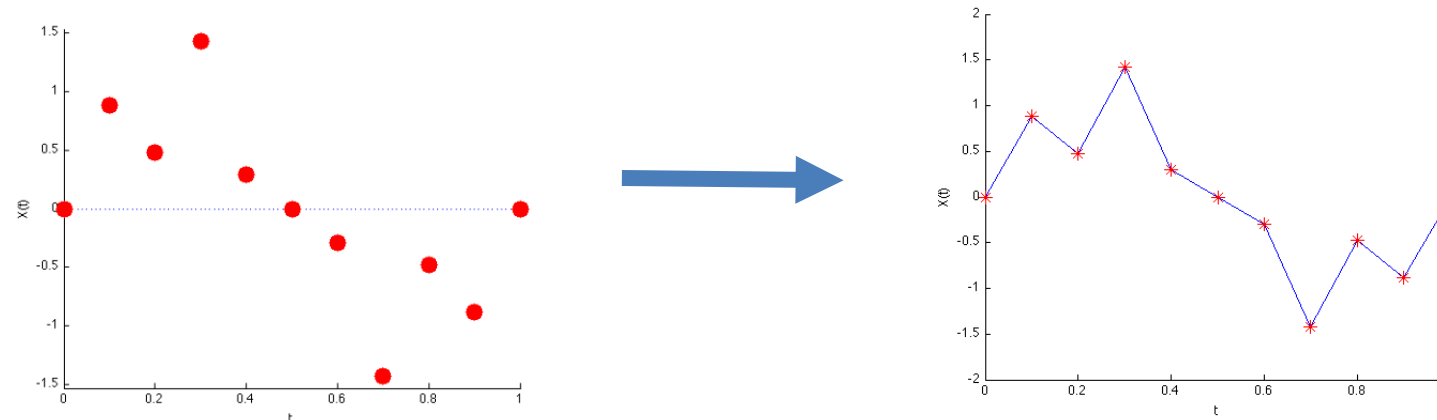
- ... Dans certains cas, c'est assez clair...
- ... Dans d'autres, ça l'est un peu moins!



Reconstruction d'un signal

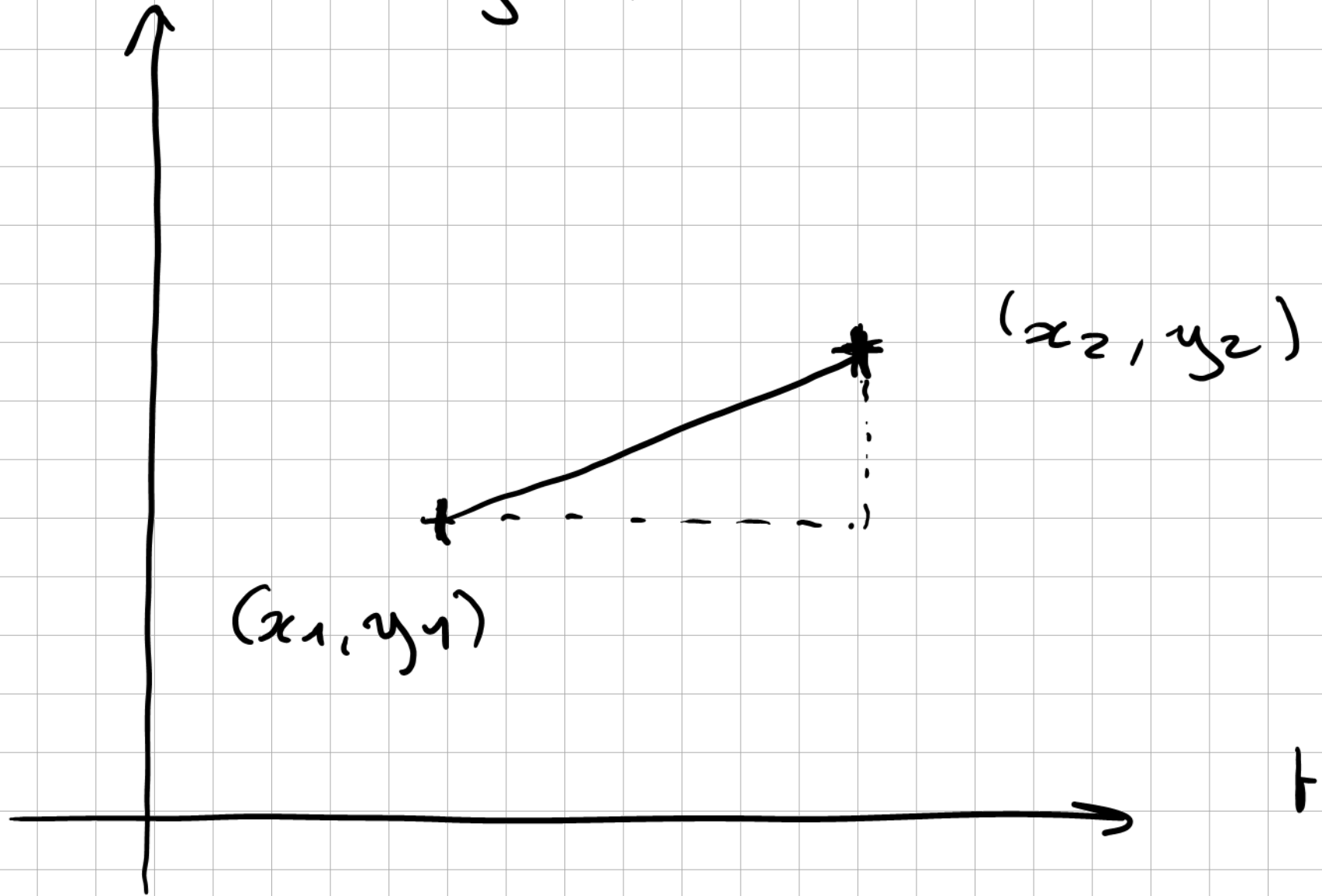
On dispose de plusieurs techniques pour interpoler un signal:

1. “Relier les points”: dans l'exemple précédent, ça donne ceci:



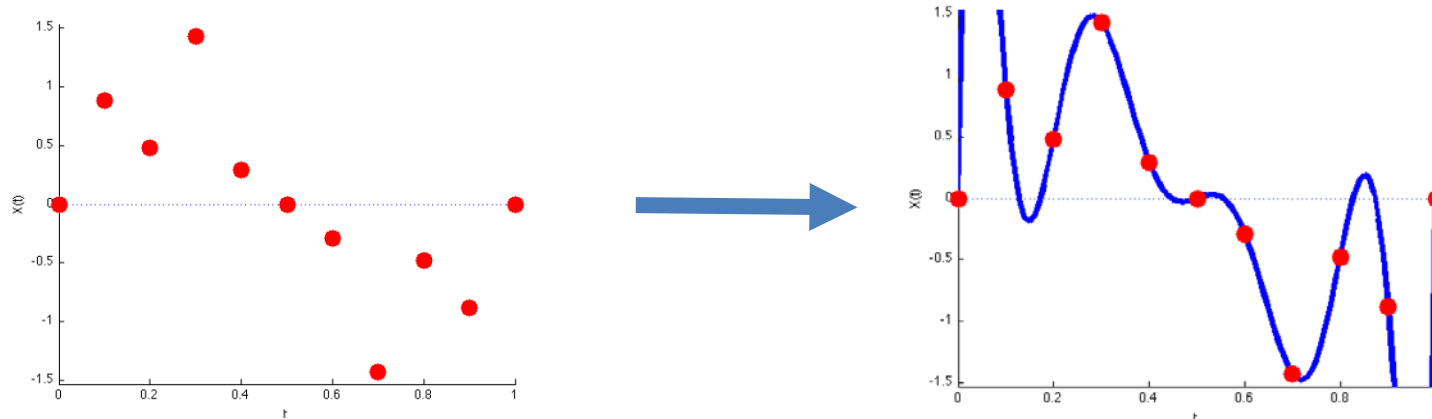
Un défaut principal: la “courbe” obtenue n’est pas régulière.

$$y = ax + b$$



Reconstruction d'un signal

2. Trouver un polynôme qui passe par tous les points.

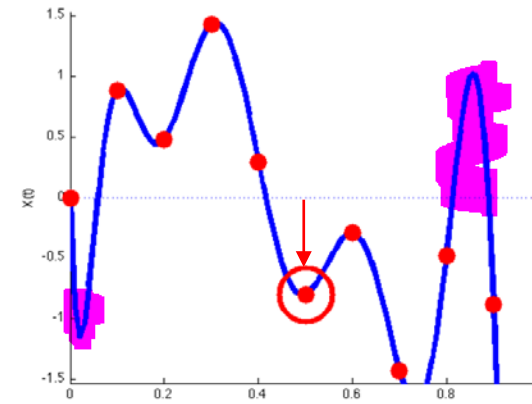
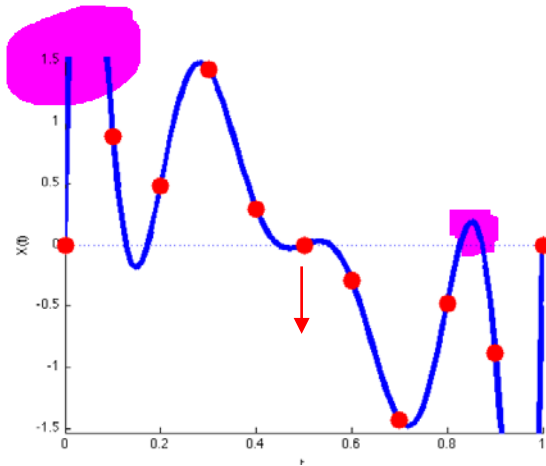


Deux défauts principaux:

- ... Avec N points, il faut trouver un polynôme de degré $N-1$: la procédure est complexe!

Reconstruction d'un signal

2. Trouver un polynôme qui passe par tous les points.



Deux défauts principaux:

- .. Avec N points, il faut trouver un polynôme de degré $N-1$: la procédure est complexe!
- .. Elle est également instable: si on déplace légèrement ou on ajoute un point, le polynôme peut changer du tout au tout.

Reconstruction d'un signal

3. De manière générale, une formule d'interpolation pour $X(t)$ s'écrit:

$$X_I(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} X(nT_e) F\left(\frac{t - nT_e}{T_e}\right)$$

où $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction telle que

$$F(0) = 1 \quad \text{et} \quad \underline{F(k) = 0} \quad \text{pour tout} \quad \underline{k \in \mathbb{Z}^*}$$

Cette condition implique en particulier que

$$X_I(nT_e) = X(nT_e) \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{Z}$$

Quelle fonction F choisir?

$$\begin{aligned}
 X_i(f) &= X(0) \cdot F(t/T_e) \\
 &+ X(T_e) \cdot F((t-T_e)/T_e) \\
 &+ X(2T_e) \cdot F((t-2T_e)/T_e) \\
 &+ \dots \\
 &+ \text{cote' negatif}
 \end{aligned}$$

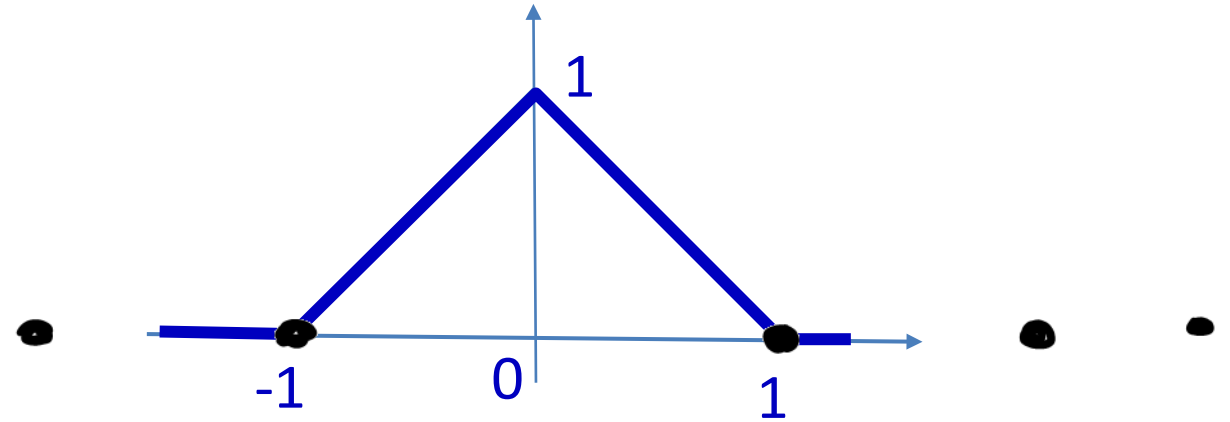
$$\begin{aligned}
 t=0 &\rightarrow X(0) \cdot \underbrace{F(0)}_{=1} + X(T_e) \cdot \underbrace{F(-1)}_{=0} \\
 t=0 &\rightarrow X(0) + X(2T_e) \cdot \underbrace{F(-2)}_{=0}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \rightarrow t=T_e &\rightarrow X(0) \cdot \underbrace{F(1)}_{=0} + \boxed{X(T_e) \cdot \underbrace{F(0)}_{=1}} \\
 t=T_e &+ X(2T_e) \cdot \underbrace{F(-1)}_{=0} = 0
 \end{aligned}$$

Reconstruction d'un signal

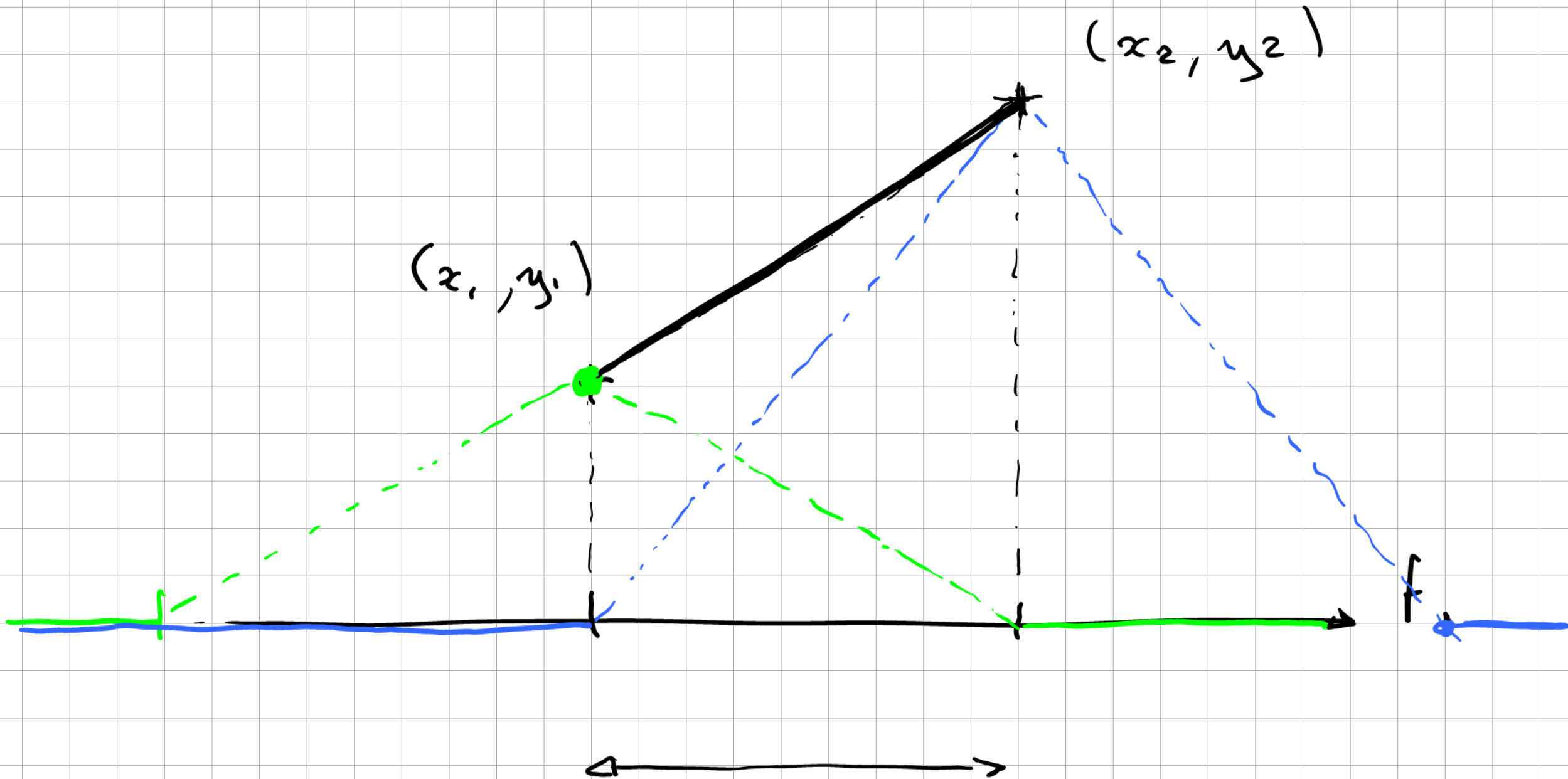
La fonction F qui permet de “relier les points” est donnée par

$$F(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{si } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |t| \geq 1 \end{cases}$$



$$F(0) = 1$$

$$F(\text{pour tout entier relatif différent de zéro}) = 0$$



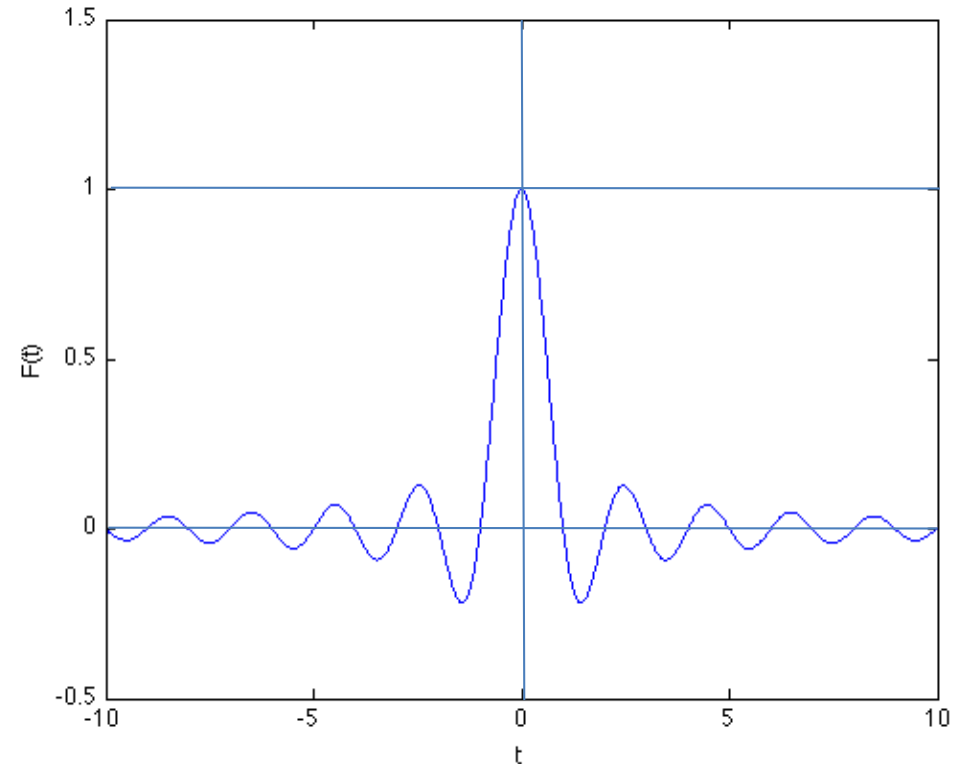
Reconstruction d'un signal: interpolation

On peut faire mieux en choisissant

$$F(t) = (1-t)(1+t)(1-t/2)(1+t/2)(1-t/3)(1+t/3) \dots$$

Cette fonction est régulière, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on vérifie que $F(0) = 1$ et $F(k) = 0$.

$$F(t) = \text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}, \quad t \in \mathbb{R}$$



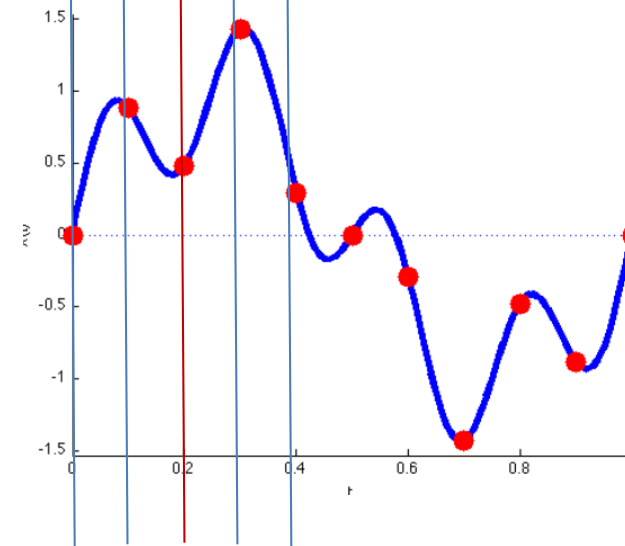
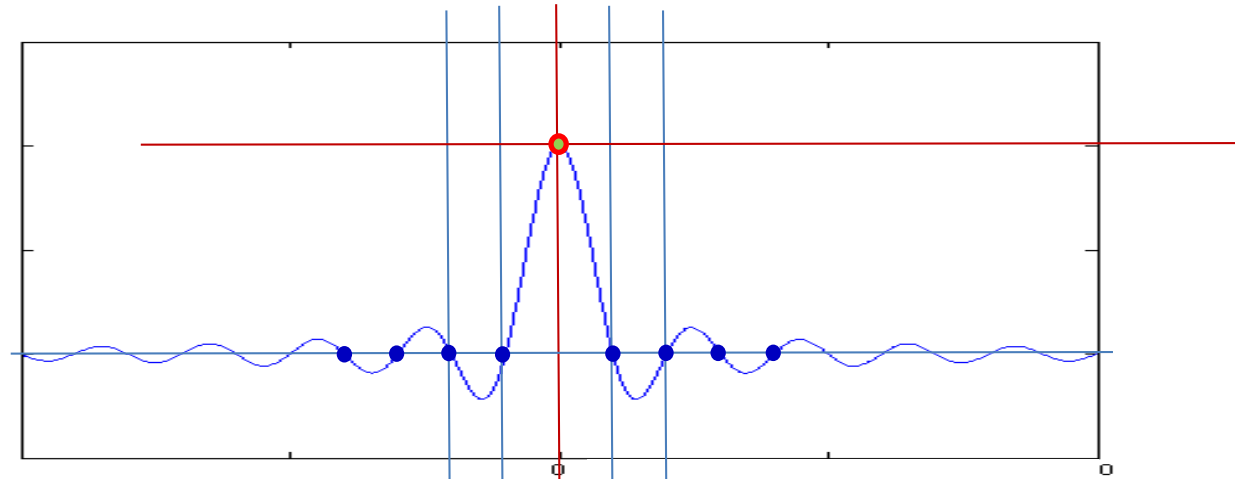
Reconstruction d'un signal: interpolation

$$F(t) = \text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

$$t \in \mathbb{R}$$

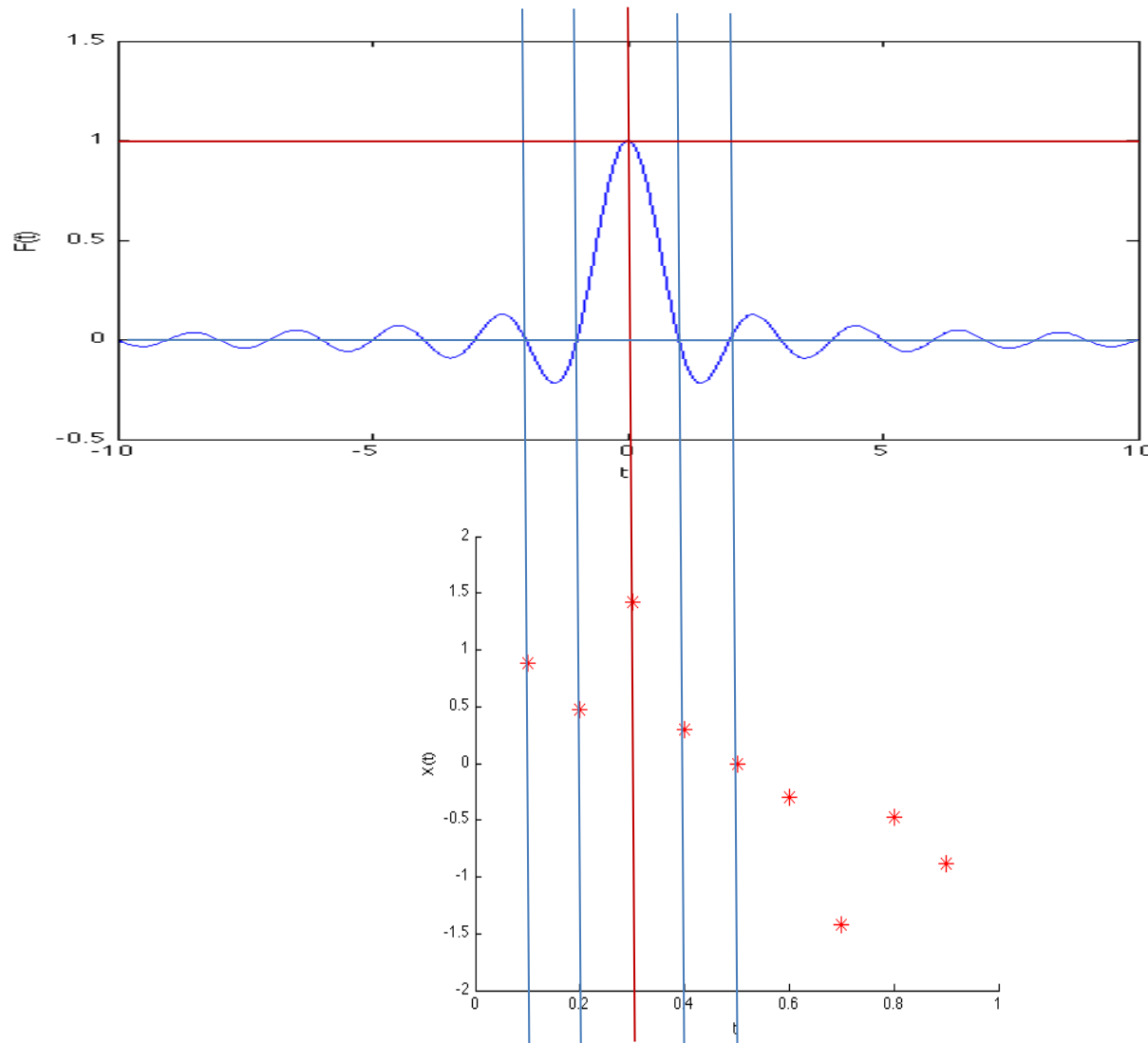
Ce qui donne dans notre exemple:

$$X_I(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} X(nT_e) \text{sinc}\left(\frac{t - nT_e}{T_e}\right)$$



Rôle des éléments de sinc()

$$X_I(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} X(nT_e) \operatorname{sinc}\left(\frac{t - nT_e}{T_e}\right)$$



Le terme $-nT_e$ introduit un déphasage temporel qui centre la fonction normalisée **sinc(t/T_e)** sur chaque instant échantillonné nT_e

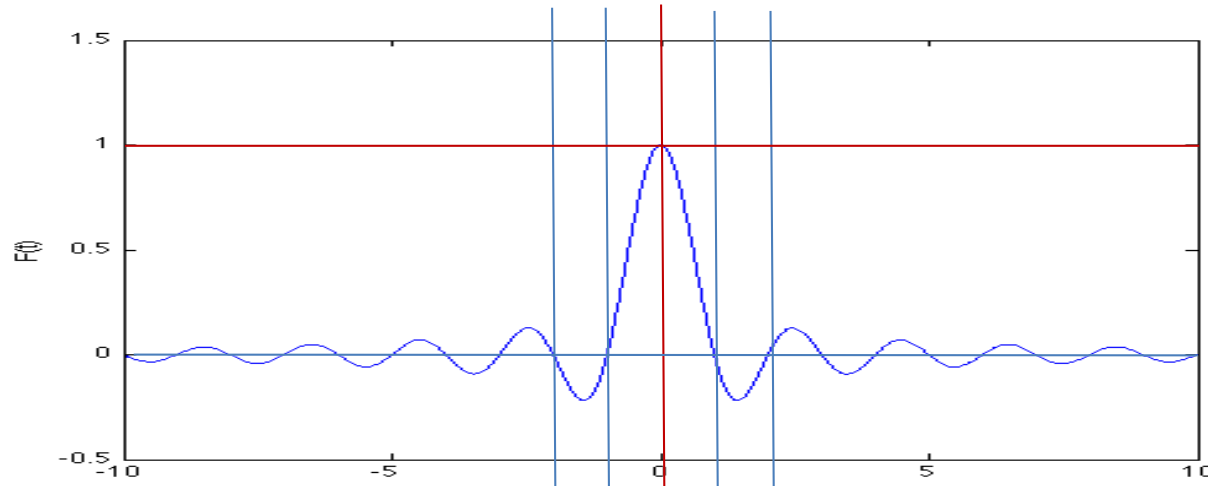
On obtient $X(nT_e)$ quand $t = nT_e$ car **sinc((nT_e-nT_e)/T_e)** vaut 1.

La normalisation du temps t par T_e permet d'annuler l'influence des autres échantillons $m \neq n$

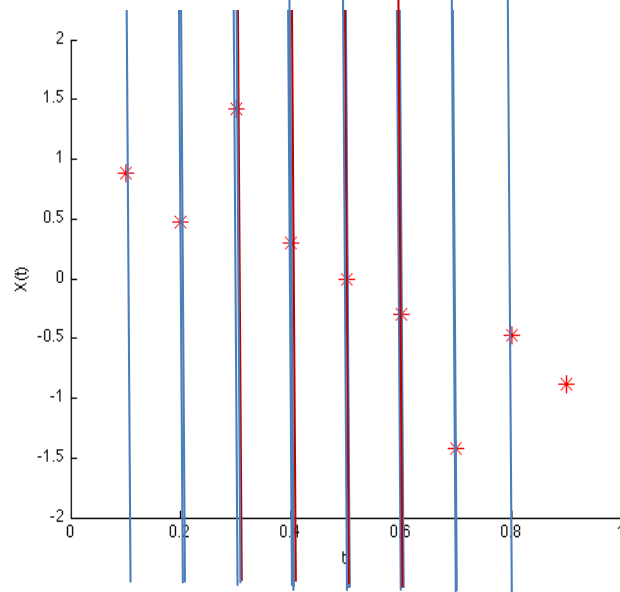
On obtient 0 quand $t = mT_e$ car **sinc(m-n)** vaut 0 pour tout $(m-n)$ entier relatif différent de zéro.

Rôle de la somme des sinc()

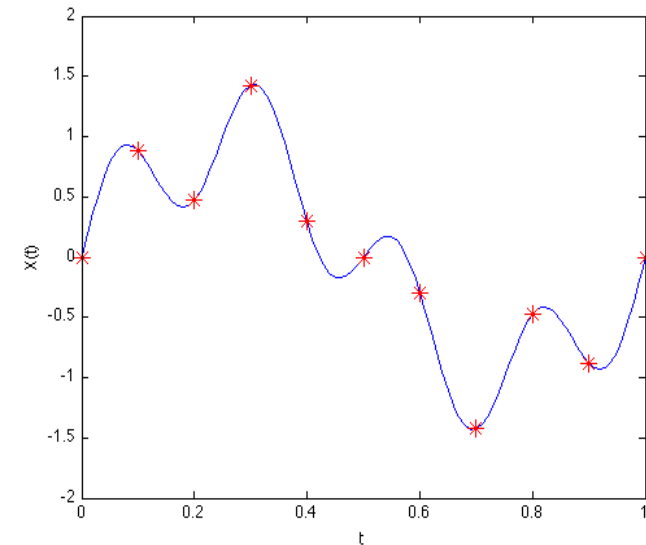
$$X_I(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} X(nT_e) \operatorname{sinc}\left(\frac{t - nT_e}{T_e}\right)$$



Exercice d'échantillonnage
et reconstruction dans
les slides 16-27



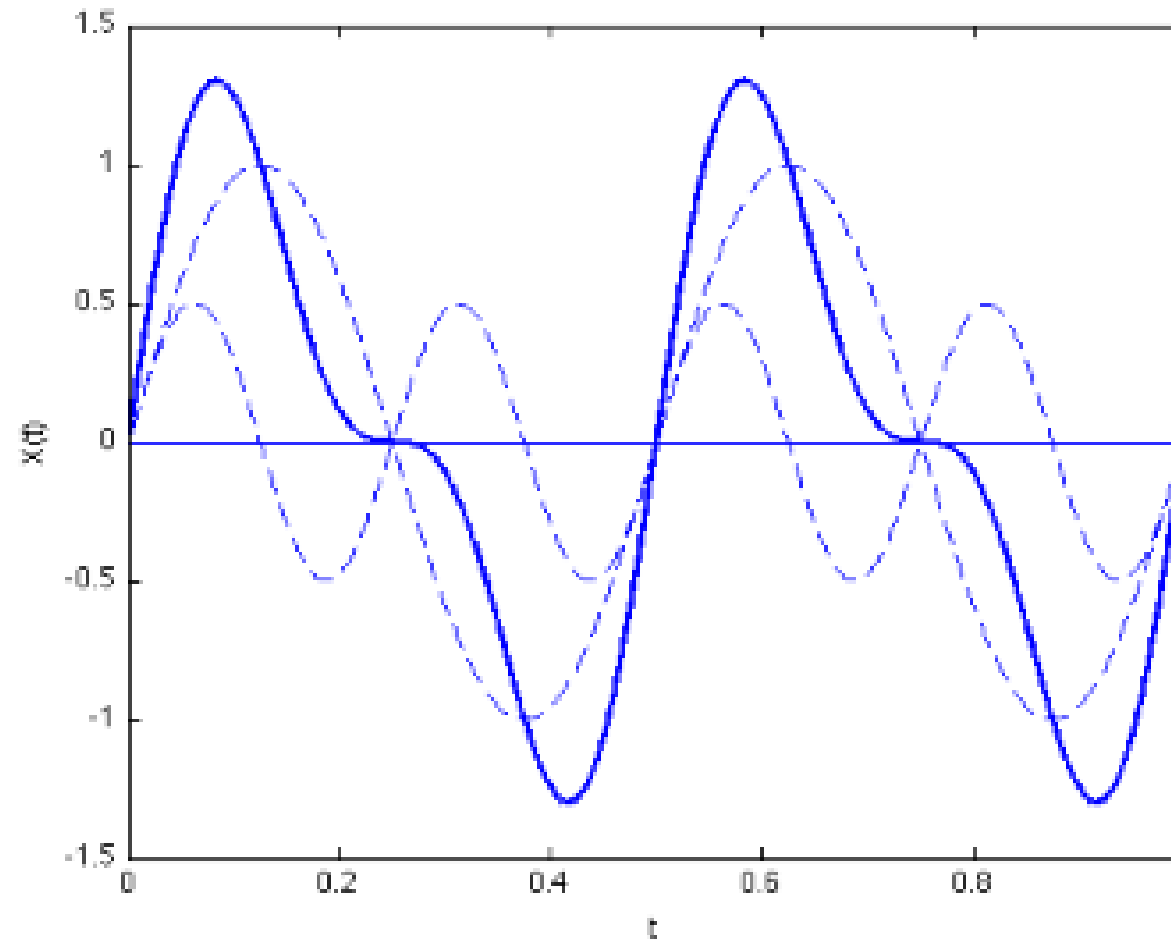
$$\sum_{n \in \mathbb{Z}}$$



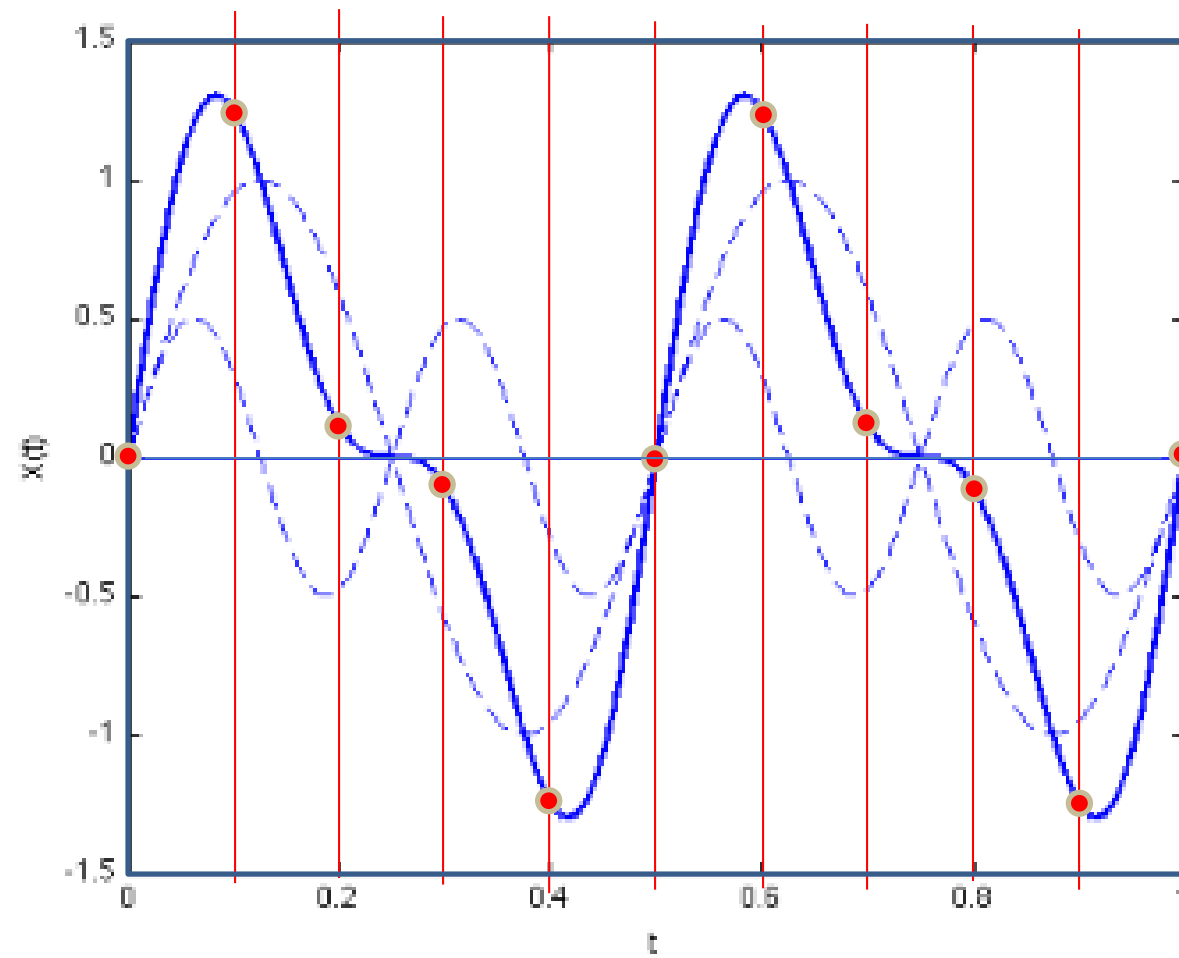
$$X(t) = \sin(4\pi t) + \frac{1}{2} \sin(8\pi t)$$

Exercice:

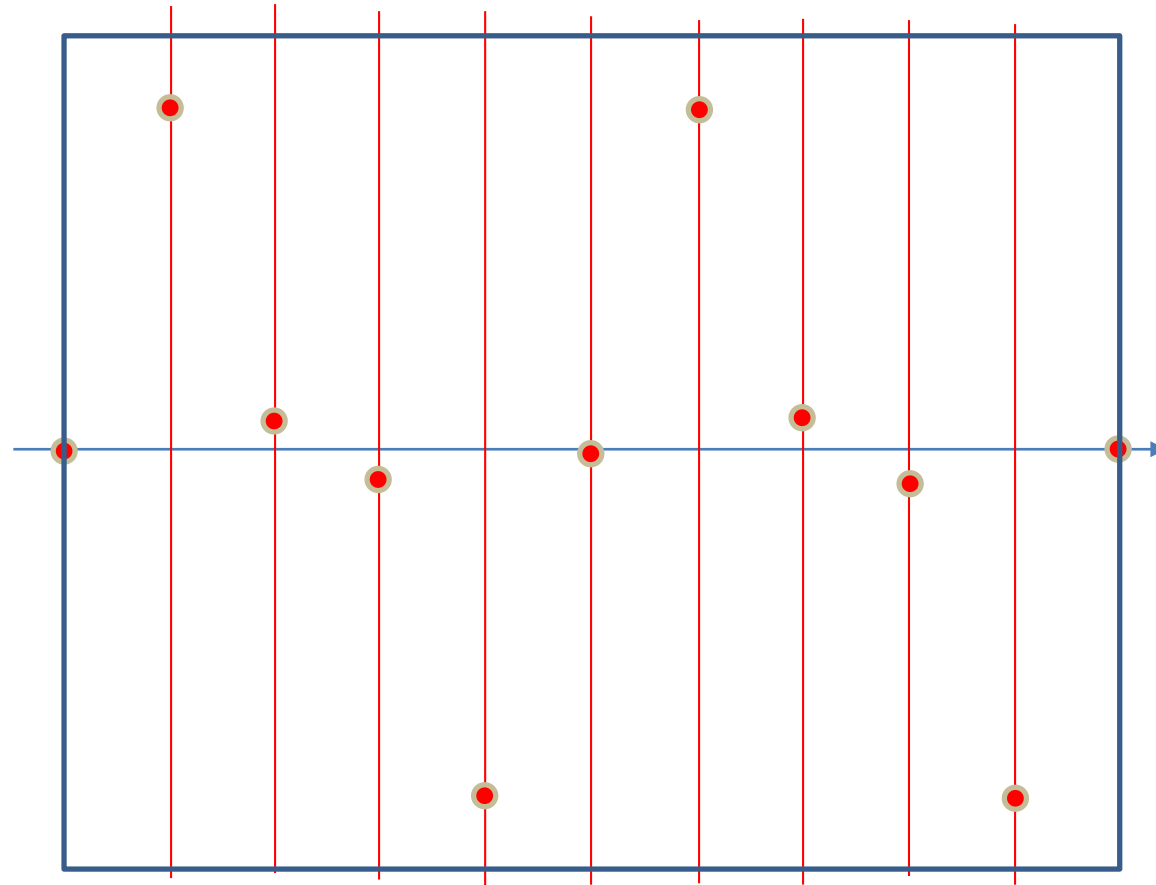
Echantillonnage et
reconstruction
d'une fonction
périodique de
fréquence 2 Hz



Echantillonnage
avec $f_e = 10$ Hz

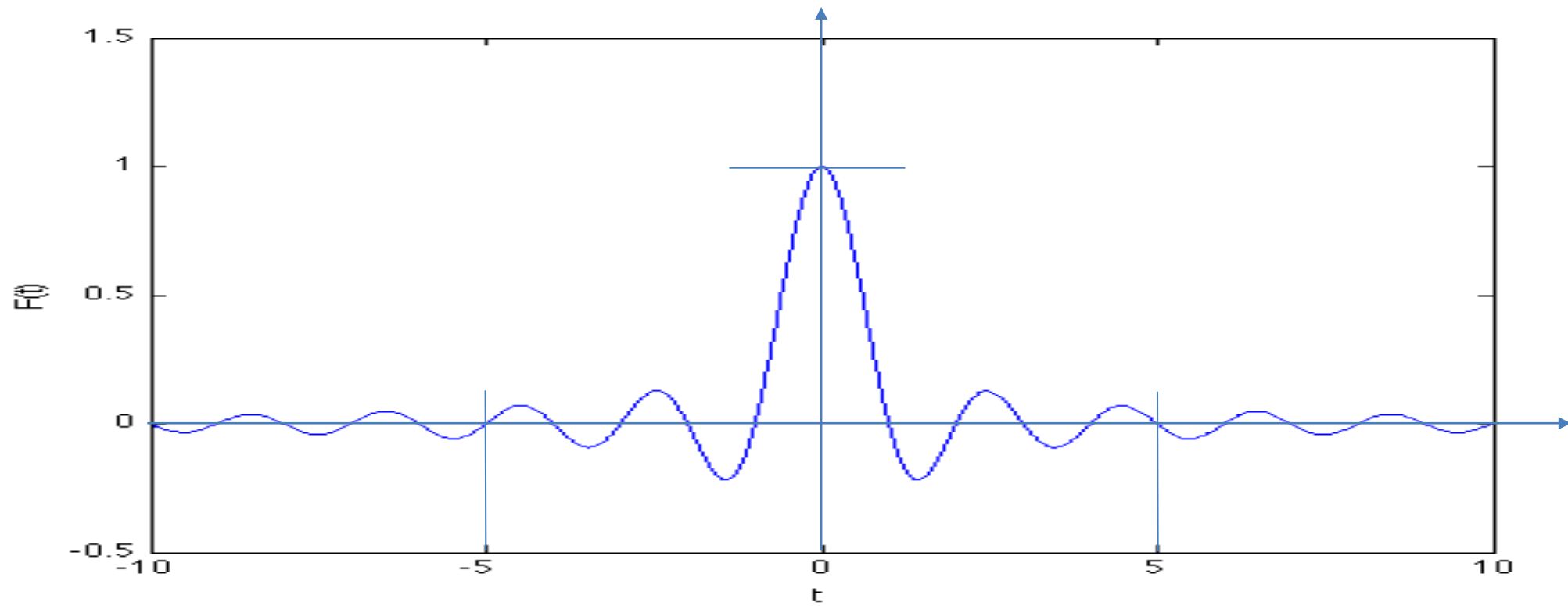


valeurs
échantillonnées
avec $f_e = 10 \text{ Hz}$



Reconstruction : l'outil

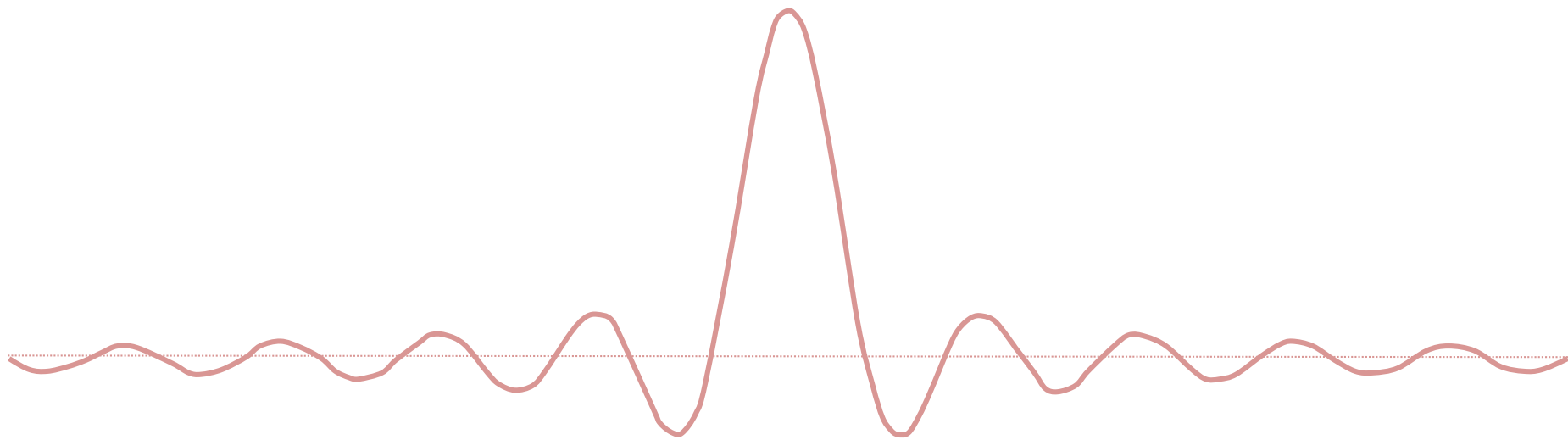
Fonction sinc : sinus cardinale normalisée



Reconstruction

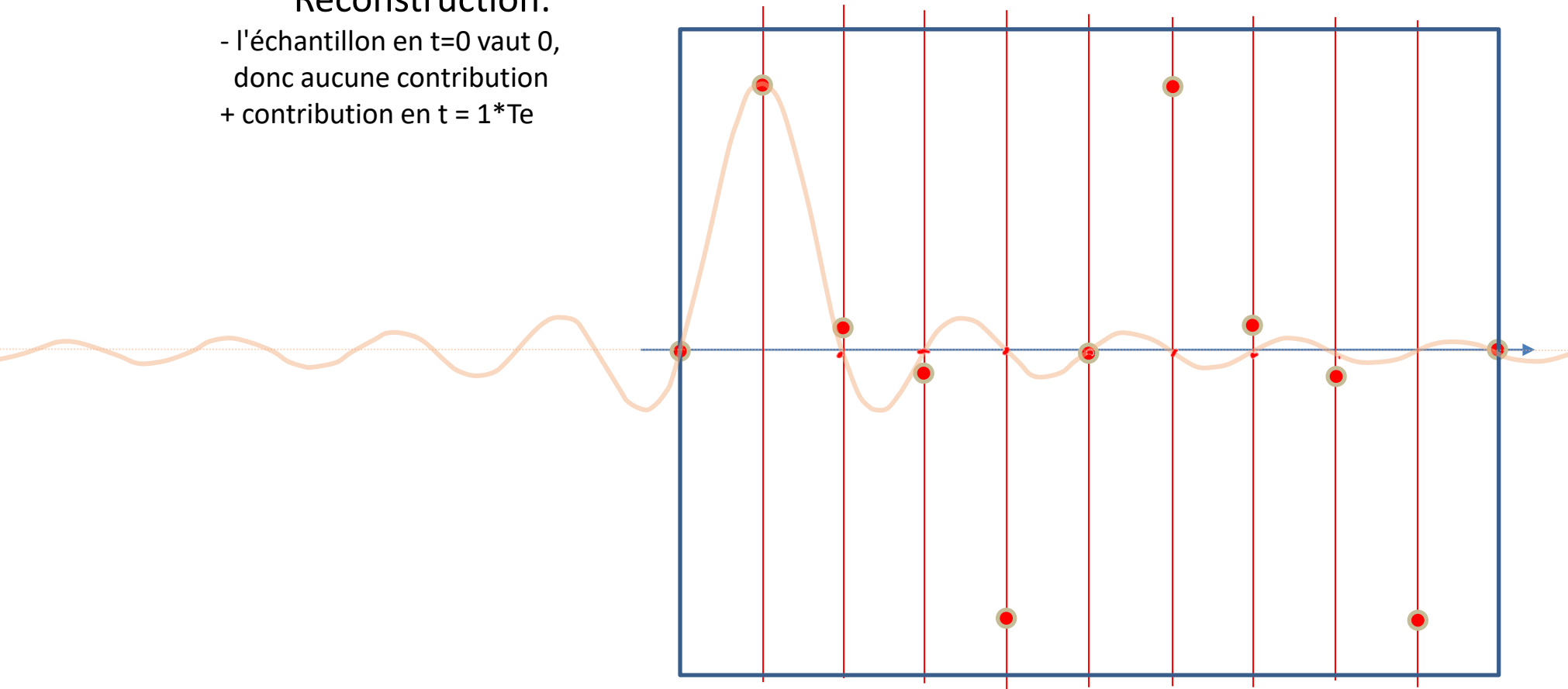
la fonction sinc est

- 1) décalée sur chaque instant échantillonné,
- 2) mise à l'échelle temporelle de la période d'échantillonnage \longleftrightarrow
- 3) mise à l'échelle de la valeur échantillonnée \updownarrow



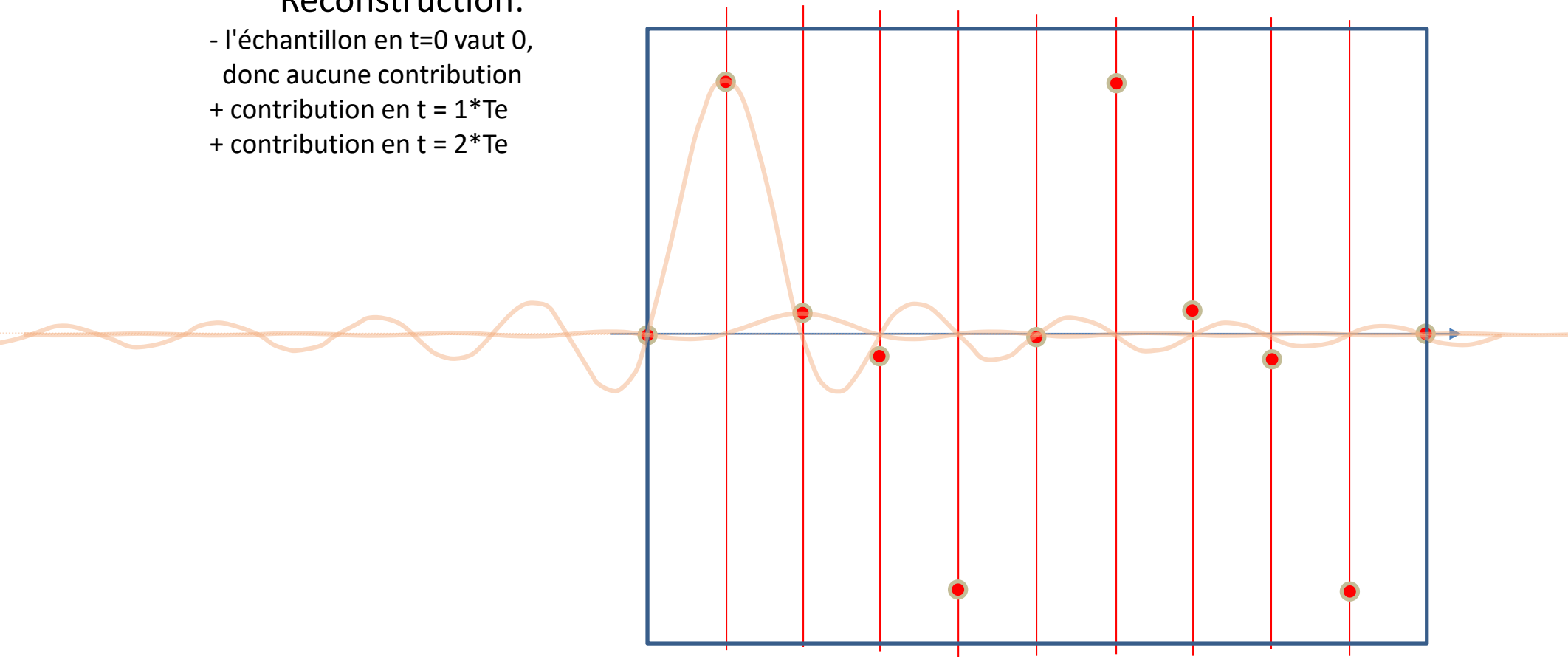
Reconstruction:

- l'échantillon en $t=0$ vaut 0, donc aucune contribution
- + contribution en $t = 1 \cdot T_e$



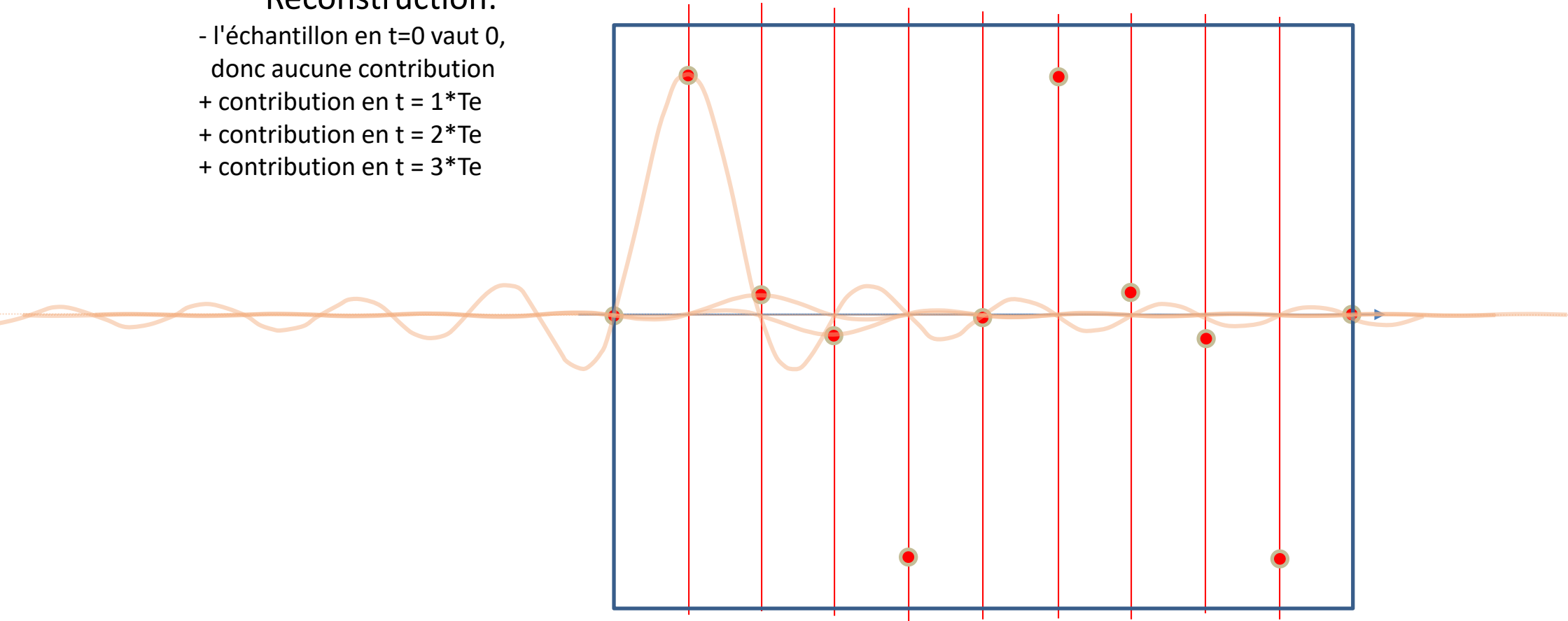
Reconstruction:

- l'échantillon en $t=0$ vaut 0, donc aucune contribution
- + contribution en $t = 1 \cdot T_e$
- + contribution en $t = 2 \cdot T_e$



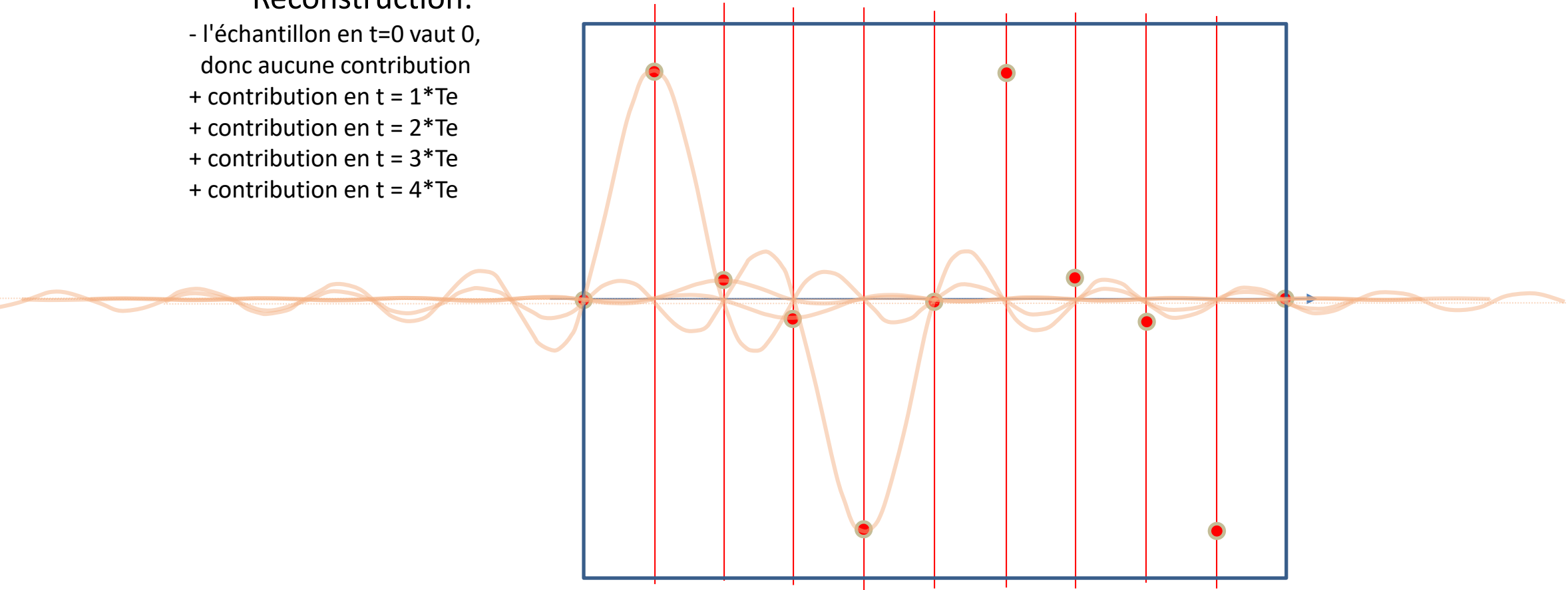
Reconstruction:

- l'échantillon en $t=0$ vaut 0, donc aucune contribution
- + contribution en $t = 1 \cdot T_e$
- + contribution en $t = 2 \cdot T_e$
- + contribution en $t = 3 \cdot T_e$



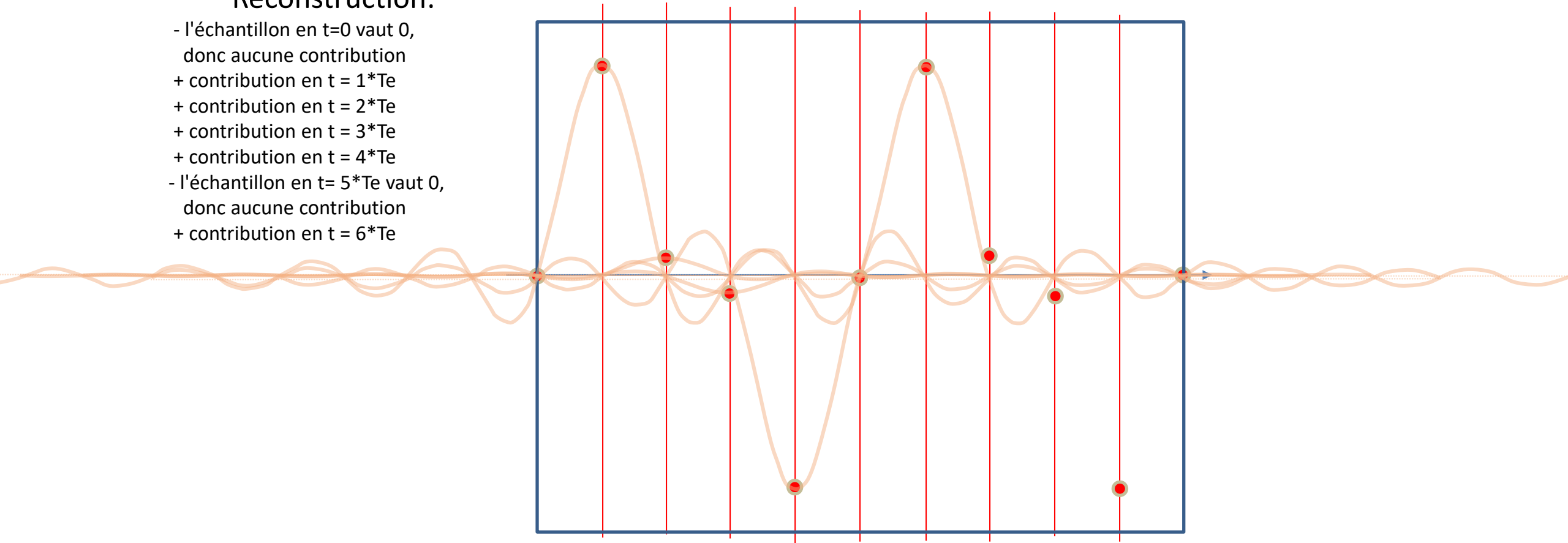
Reconstruction:

- l'échantillon en $t=0$ vaut 0, donc aucune contribution
- + contribution en $t = 1 \cdot T_e$
- + contribution en $t = 2 \cdot T_e$
- + contribution en $t = 3 \cdot T_e$
- + contribution en $t = 4 \cdot T_e$



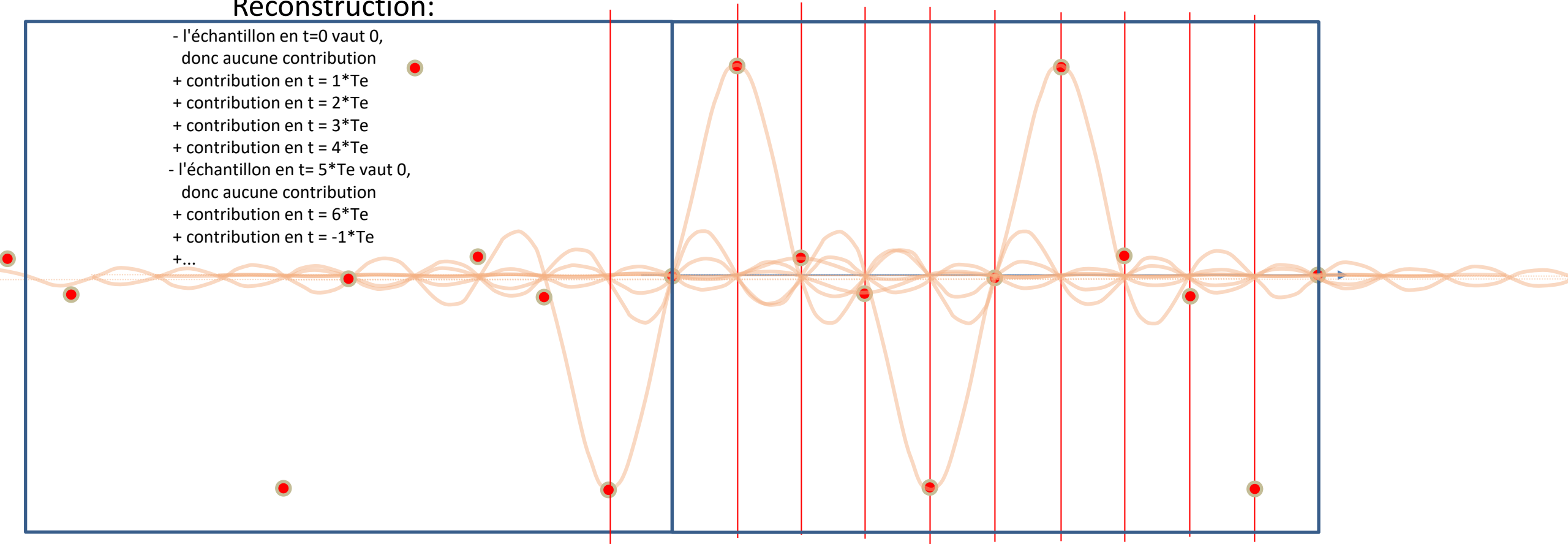
Reconstruction:

- l'échantillon en $t=0$ vaut 0, donc aucune contribution
- + contribution en $t = 1 \cdot T_e$
- + contribution en $t = 2 \cdot T_e$
- + contribution en $t = 3 \cdot T_e$
- + contribution en $t = 4 \cdot T_e$
- l'échantillon en $t = 5 \cdot T_e$ vaut 0, donc aucune contribution
- + contribution en $t = 6 \cdot T_e$



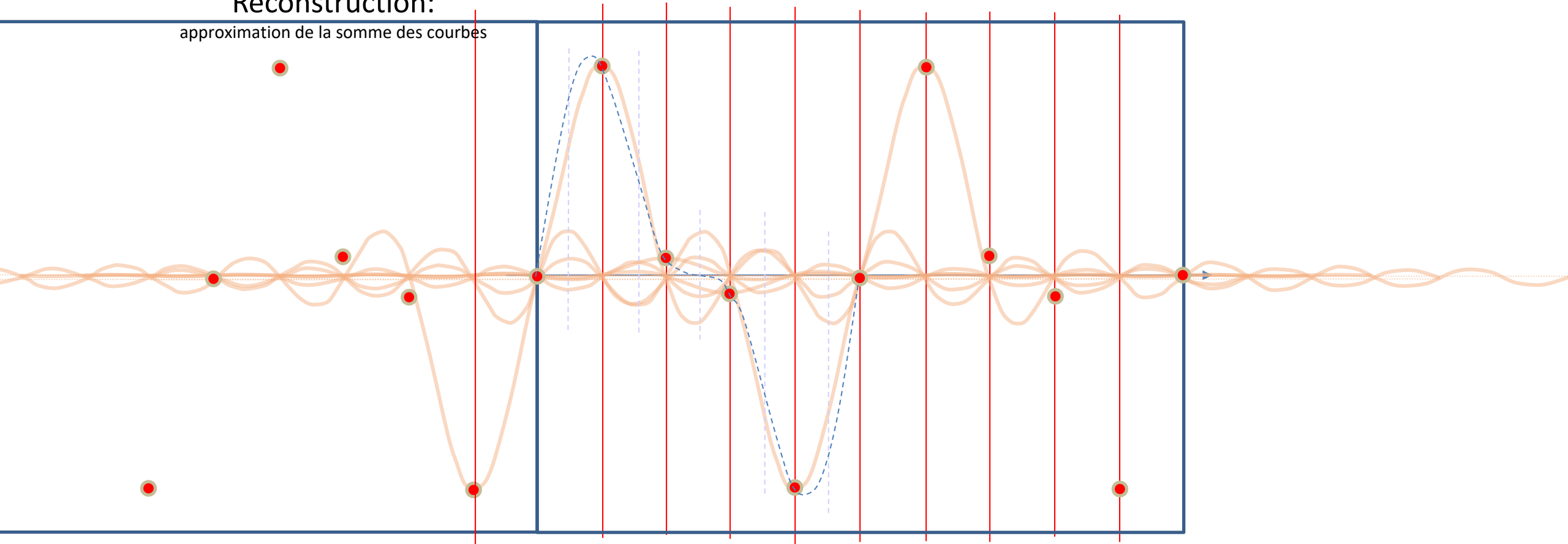
Reconstruction:

- l'échantillon en $t=0$ vaut 0,
donc aucune contribution
- + contribution en $t = 1*Te$
- + contribution en $t = 2*Te$
- + contribution en $t = 3*Te$
- + contribution en $t = 4*Te$
- l'échantillon en $t= 5*Te$ vaut 0,
donc aucune contribution
- + contribution en $t = 6*Te$
- + contribution en $t = -1*Te$
- +...



Reconstruction:

approximation de la somme des courbes



Reconstruction d'un signal: interpolation

Pour retrouver un signal à partir de sa version échantillonnée, on a donc maintenant une formule d'interpolation:

$$X_I(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} X(nT_e) \operatorname{sinc}\left(\frac{t - nT_e}{T_e}\right)$$

Il nous reste une question cruciale à résoudre:
quand est-ce que $X_I(t) = X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$?

Le théorème d'échantillonnage

La paternité de ce théorème est attribuée à plusieurs personnes, qui l'ont successivement redécouvert / amélioré au cours des ans...

1. Edmund Taylor Whittaker (1873-1956), mathématicien anglais, qui publie en 1915 la formule d'interpolation qu'on vient de voir.



3. Vladimir Aleksandrovich Kotelnikov (1908- 2005), pionnier de la radio-astronomie, qui découvre ce résultat indépendamment en 1933 en URSS.



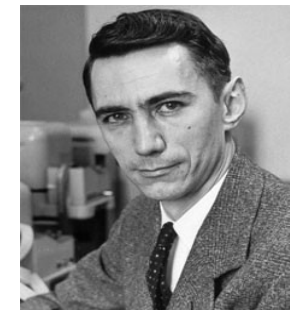
4. Herbert Raabe (1909-2004), qui publie sa thèse sur le sujet en 1939 en Allemagne...



2. Harry Nyquist (1889-1979), ingénieur aux Laboratoires Bell, qui publie en 1928 un article sur “la théorie de la transmission par le télégraphe”.



5. Claude Edwood Shannon (1916-2001), également ingénieur aux Laboratoires Bell, qui publie en 1949 un article sur la “communication en présence de bruit”, et que nous allons revoir la semaine prochaine...



Le théorème d'échantillonnage

Soit $(X(t), t \in \mathbb{R})$ un signal dont la plus grande fréquence est égale f_{\max} .

Soit $(X(nT_e), n \in \mathbb{Z})$ le même signal échantillonné avec une période T_e et une fréquence correspondante $f_e = 1/T_e$

Soit $(X_I(t), t \in \mathbb{R})$ tel que

$$X_I(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} X(nT_e) \operatorname{sinc}\left(\frac{t - nT_e}{T_e}\right)$$

Alors:

Si $f_e > 2f_{\max}$ alors $X_I(t) = X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$

Si $X_I(t) = X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ alors $f_e \geq 2f_{\max}$

Le théorème d'échantillonnage: illustration

- Voyons graphiquement ce que donne la reconstruction d'une sinusoïde pure:

$$X(t) = \sin(2\pi ft)$$

- La version échantillonnée de ce signal est: $X(nT_e) = \sin(2\pi f nT_e)$ et la formule d'interpolation devient:

$$X_I(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sin(2\pi f nT_e) \operatorname{sinc}\left(\frac{t - nT_e}{T_e}\right)$$

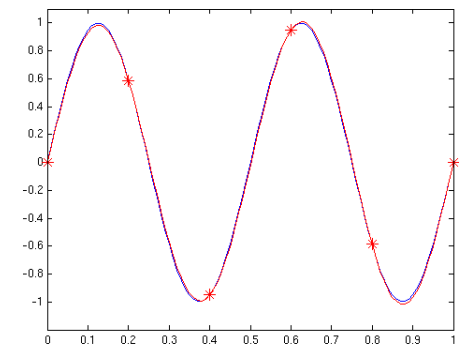
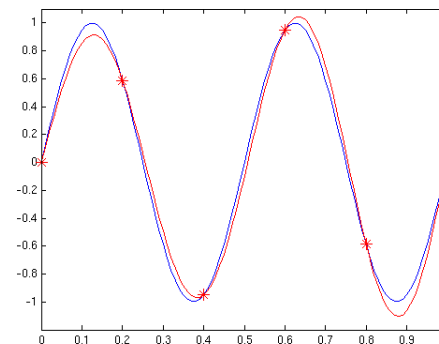
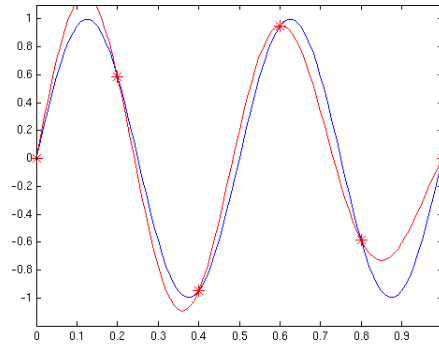
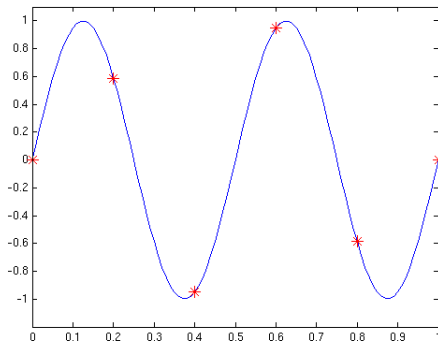
De manière pratique, on se limite pour la reconstruction à quelques termes de la somme:

$$X_I(t) \approx \sum_{n=-N}^N \sin(2\pi f nT_e) \operatorname{sinc}\left(\frac{t - nT_e}{T_e}\right)$$

Le théorème d'échantillonnage: illustration

$$X_I(t) \approx \sum_{n=-N}^N \sin(2\pi f n T_e) \operatorname{sinc}\left(\frac{t - n T_e}{T_e}\right)$$

Voici ce que donne cette formule d'interpolation pour $f = 2$ Hz et $f_e = 5$ Hz (donc $T_e = 0.2$ sec):



avec $N = 5$,

$N = 10$,

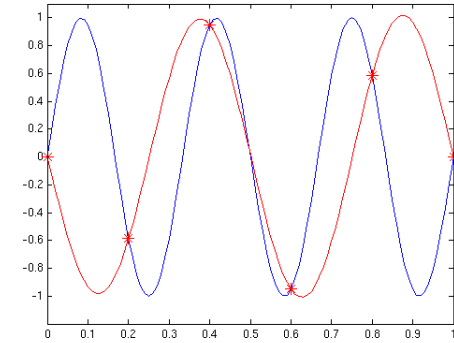
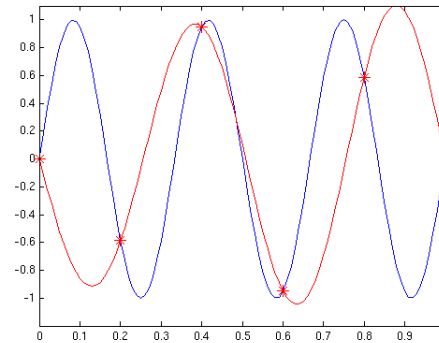
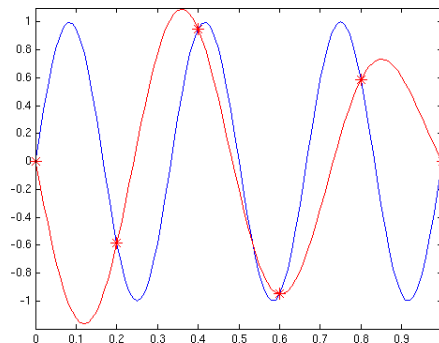
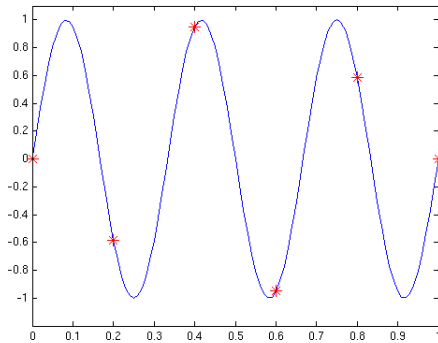
$N = 50$.

Si $f_e > 2f$, la reconstruction est bonne.

Le théorème d'échantillonnage: illustration

$$X_I(t) \simeq \sum_{n=-N}^N \sin(2\pi f n T_e) \operatorname{sinc}\left(\frac{t - n T_e}{T_e}\right)$$

Voici ce que donne cette formule d'interpolation pour $f = 3$ Hz et $f_e = 5$ Hz (donc $T_e = 0.2$ sec):



avec $N = 5$,

$N = 10$,

$N = 50$.

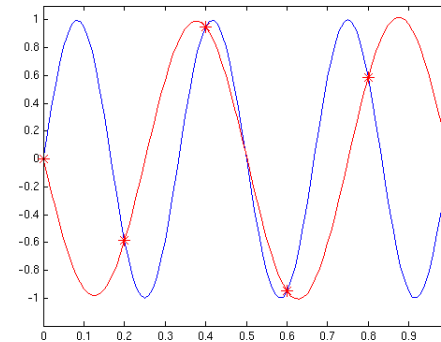
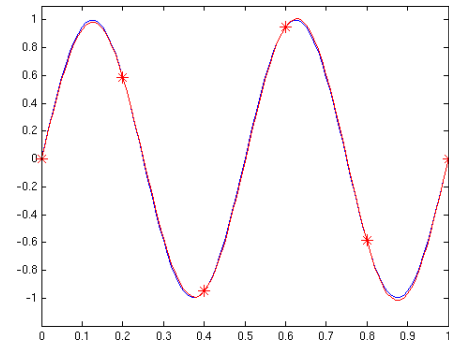
Si $f_e < 2f$, on a un problème...

Essayons de mieux comprendre cet exemple

Rappel: la fréquence d'échantillonnage $f_e = 5$ Hz.

∴ Quand $f = 2$ Hz, la reconstruction est bonne.

∴ Quand $f = 3$ Hz, la reconstruction est mauvaise.

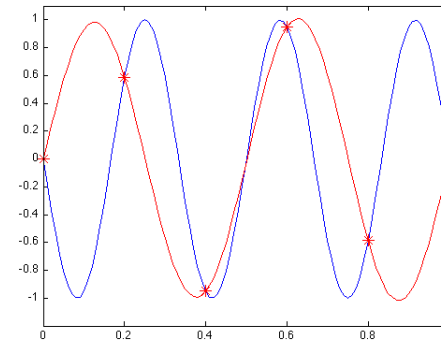
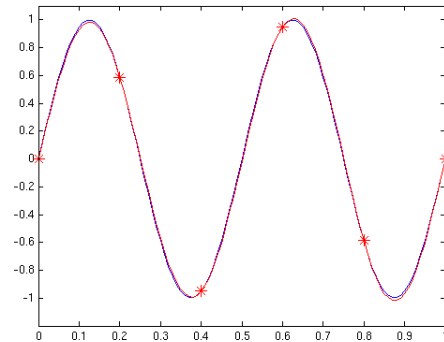


Essayons de mieux comprendre cet exemple

Rappel: la fréquence d'échantillonnage $f_e = 5$ Hz.

∴ Quand $f = 2$ Hz, la reconstruction est bonne.

∴ Quand $f = 3$ Hz, la reconstruction est mauvaise.



Multiplions le graphe de droite par -1

Les valeurs échantillonnées sont les mêmes à gauche et à droite!

La courbe reconstruite avec la formule d'interpolation est donc aussi la même à gauche et à droite! (mais pas le signal d'origine)

La *fréquence apparente* de 2Hz est causée par le *repliement du spectre*. Intuitivement, ce qui dépasse au-delà de la limite théorique à 2,5 Hz est replié sous cette limite:

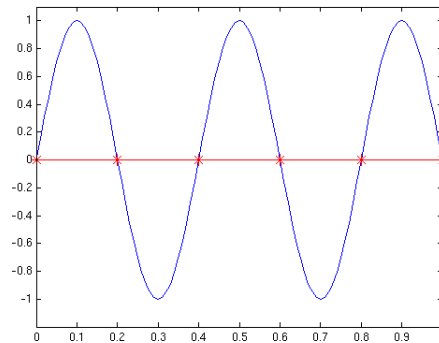
$$2,5 - (3 - 2,5) = 2,5 - 0,5 = 2 \text{ Hz}$$

Le théorème d'échantillonnage: cas limite (1)

$$X_I(t) \simeq \sum_{n=-N}^N \sin(2\pi fnT_e) \operatorname{sinc}\left(\frac{t-nT_e}{T_e}\right)$$

Et si $f_e = 2f$? Voici ce que donne cette formule d'interpolation pour

$f = 2.5$ Hz et $f_e = 5$ Hz:

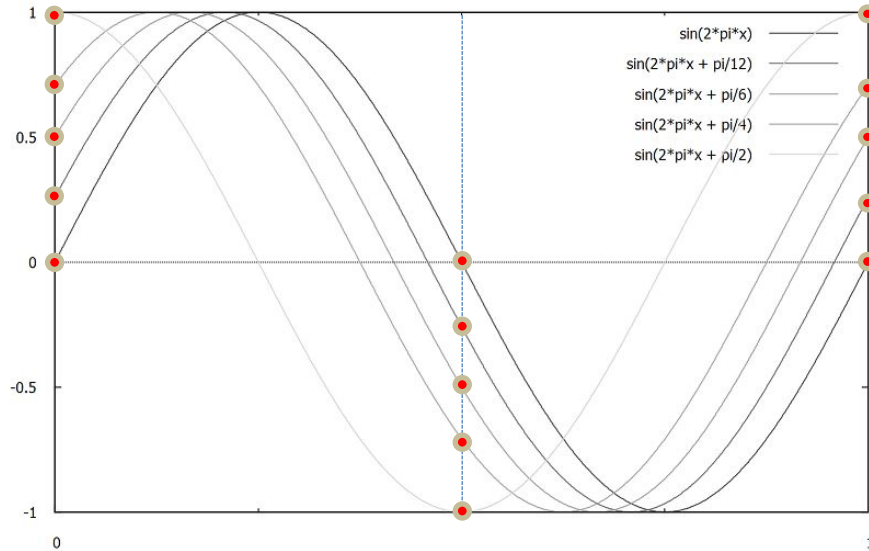


pour toute valeur de N ... Ici aussi, on a un problème....

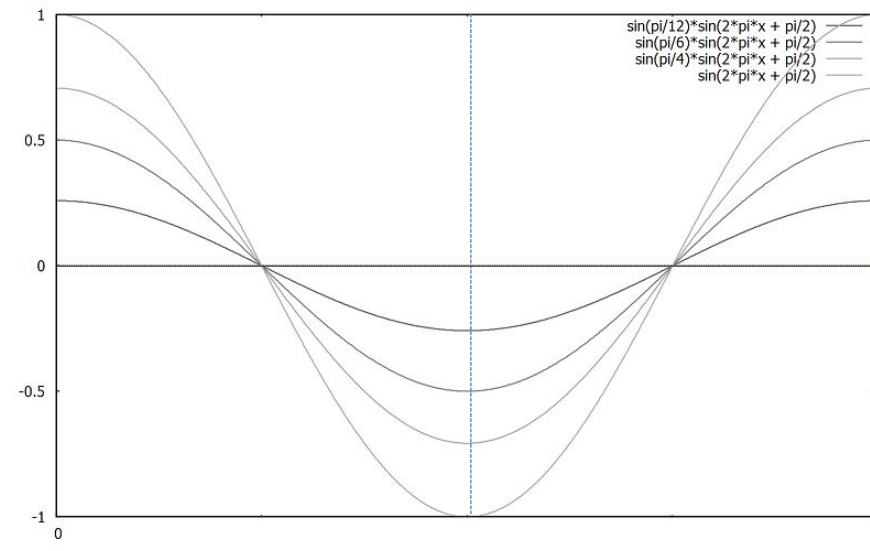
Le théorème d'échantillonnage: cas limite (2)

Et si $f_e = 2f$? Examinons la reconstruction pour $f = 1$ Hz et $f_e = 2$ Hz avec différents déphasages: de $\pi/12$ à $\pi/2$

Signal échantillonné



Signal reconstruit



Dans le cas limite, le déphasage a aussi une influence

Exemple: conclusion

Rappel: la fréquence d'échantillonnage $f_e = 5$ Hz.

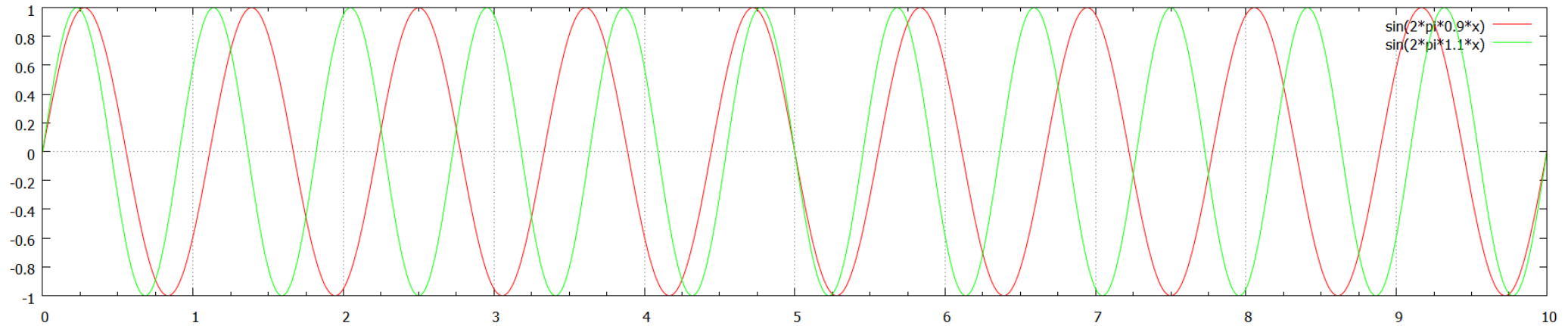
- ... A partir des seules valeurs échantillonnées de la sinusoïde, il n'est pas possible de dire si celle-ci a une fréquence de $f = 2$ Hz ou de $f = 3$ Hz.
- ... Par construction notre formule d'interpolation produit la fréquence inférieure à $f_e/2$, c'est à dire $f = 2$ Hz.
- ... Donc si on sait dès le départ que la fréquence f de la sinusoïde d'origine est plus petite que $f_e/2 = 2.5$ Hz, alors on sait aussi que la formule d'interpolation reconstruit la bonne sinusoïde.
- ... Si par contre la fréquence f est plus grande que $f_e/2 = 2.5$ Hz, alors la formule d'interpolation produit une fréquence inférieure: c'est l'effet stroboscopique -> *fréquence apparente*

La fréquence apparente f_a est donnée par: $f_a = f_e/2 - (f - f_e/2) = f_e - f$

Exemples

Effet du sous-échantillonnage à 1 Hz de fonctions sinus de fréquence > 0.5 Hz

$f = 0.9\text{Hz}$ et 1.1 Hz

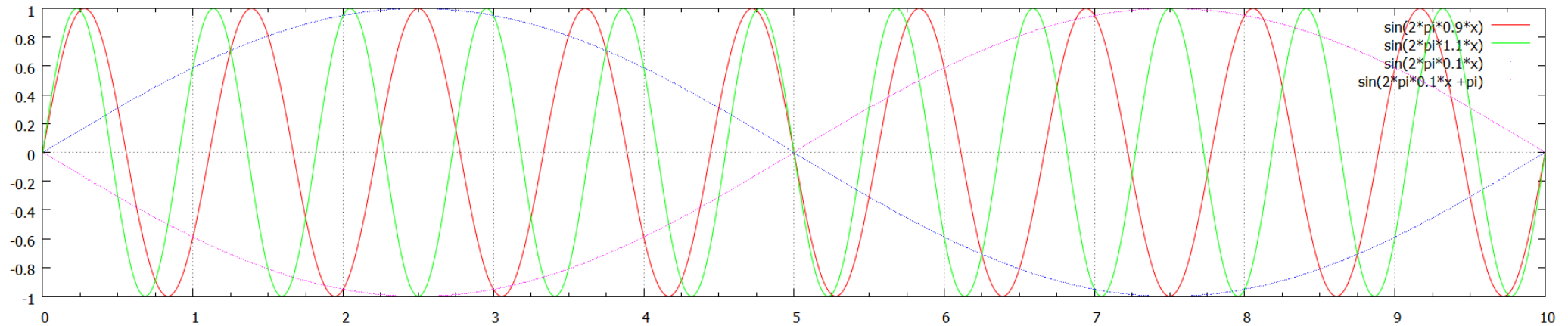


Question: déterminer la fréquence du signal apparent

Exemples

Effet du sous-échantillonnage à 1 Hz de fonctions sinus de fréquence > 0.5 Hz

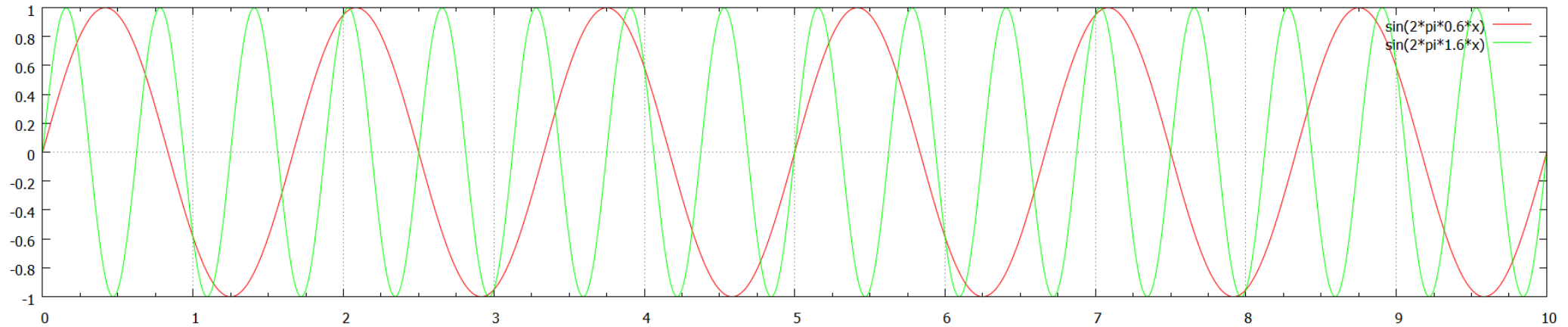
$f = 0.9\text{Hz}$ et 1.1 Hz



Exemples

Effet du sous-échantillonnage à 1 Hz de fonctions sinus de fréquence > 0.5 Hz

$f = 0.6\text{Hz}$ et 1.6 Hz

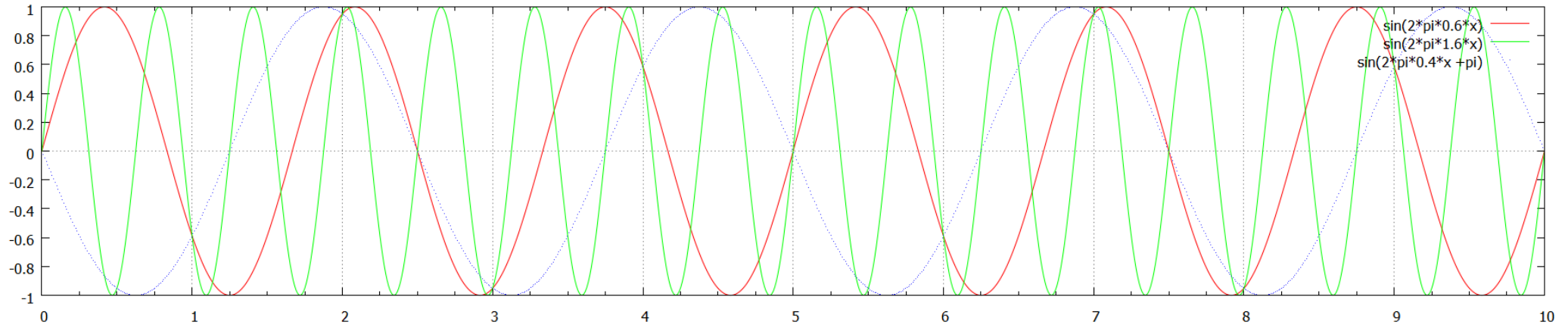


Question: déterminer la fréquence du signal apparent

Exemples

Effet du sous-échantillonnage à 1 Hz de fonctions sinus de fréquence > 0.5 Hz

$f = 0.6\text{Hz}$ et 1.6 Hz



Le théorème d'échantillonnage (rappel)

Soit $(X(t), t \in \mathbb{R})$ un signal dont la plus grande fréquence est égale f_{\max} .

Soit $(X(nT_e), n \in \mathbb{Z})$ le même signal échantillonné avec une période T_e et une fréquence correspondante $f_e = 1/T_e$

Soit $(X_I(t), t \in \mathbb{R})$ tel que

$$X_I(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} X(nT_e) \operatorname{sinc}\left(\frac{t - nT_e}{T_e}\right)$$

Alors:

Si $f_e > 2f_{\max}$ alors $X_I(t) = X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$

Si $X_I(t) = X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ alors $f_e \geq 2f_{\max}$

Préambule: pourquoi $f_e > 2f_{\max}$?

Dans tous les exemples vus précédemment, on avait à faire à un signal $X(t)$ avec une seule fréquence f .

On a vu dans ce cas que $f_e > 2f$ est une condition suffisante pour une bonne reconstruction du signal.

Et si maintenant le signal $X(t)$ contient deux fréquences f_1 et f_2 ?

Dans ce cas, il suffira que $f_e > 2f_1$ et $f_e > 2f_2$ pour que le signal soit bien reconstruit, i.e. que $f_e > 2 \max\{f_1, f_2\}$

En généralisant à un signal quelconque, on arrive donc intuitivement à la condition $f_e > 2f_{\max}$

Démonstration: 1) assertion intermédiaire (Lemme)

Lemme: la bande passante du signal $\text{sinc}(t / T_e)$ est $B = f_e / 2$

Outil: La fonction sinc est la somme de N sinusoides, pour N tendant vers ∞ :

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \simeq \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sin(2\pi f_j t + \pi / 2) \quad \text{avec} \quad f_j = \frac{j}{2N}$$

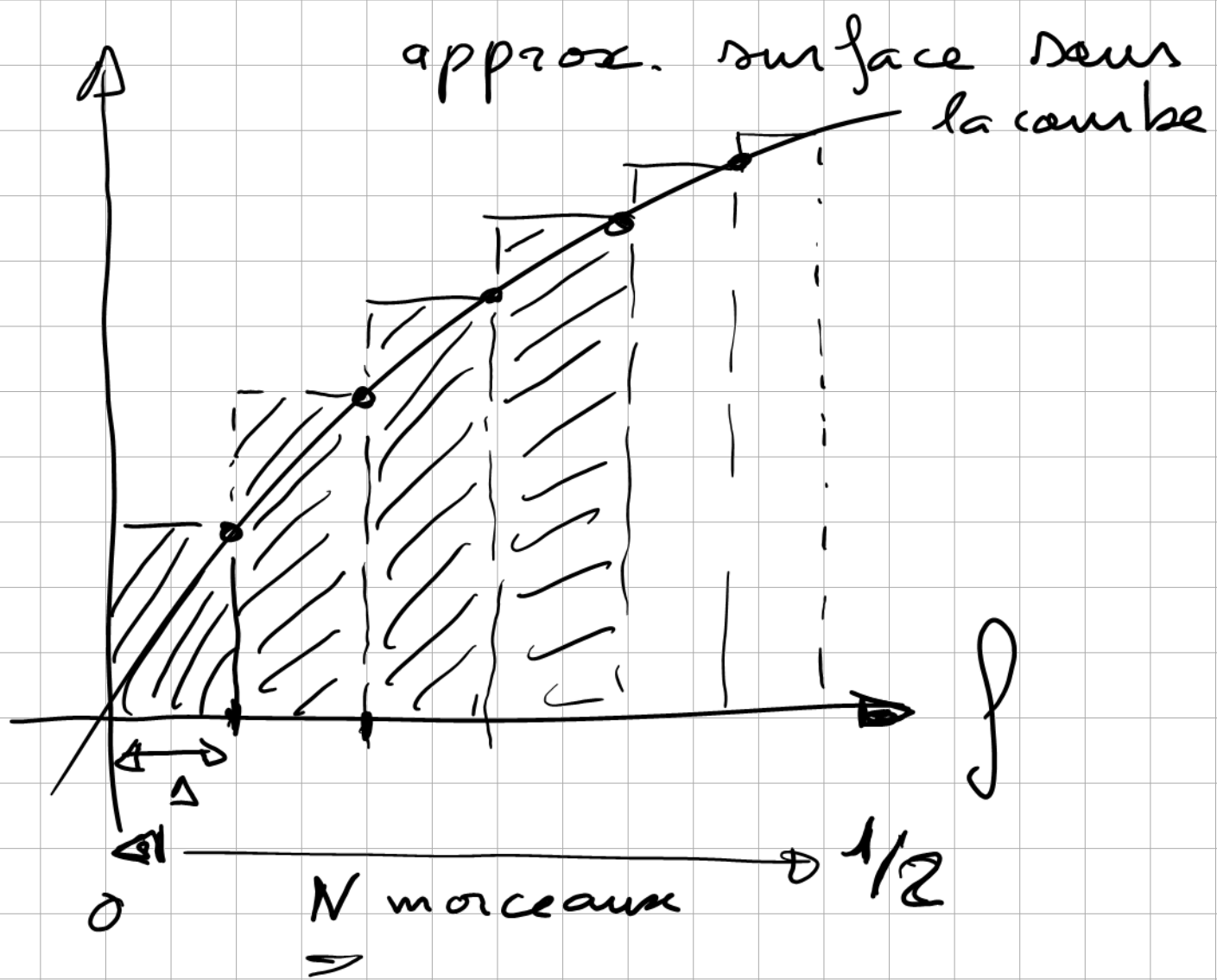
Justification:

Une telle somme est liée à l'approximation d'une intégrale de Riemann qui additionne la surface de N rectangles de largeur $1/2N$, pour f compris entre 0 et $1/2$.

$$\begin{aligned} & \Rightarrow \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^N \sin(2\pi f_j t + \pi / 2) \quad \leftarrow \\ & = \int_0^{1/2} \sin(2\pi f t + \pi / 2) df \end{aligned}$$

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sin(2\pi f_j t + \frac{\pi}{2}) = 2 \int_0^{1/2} \sin(2\pi f t + \frac{\pi}{2}) df = 2 \frac{(-\cos(\pi t + \frac{\pi}{2}) - (-\cos(\frac{\pi}{2})))}{2\pi t} = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

$$\Delta = \frac{1}{2N}$$

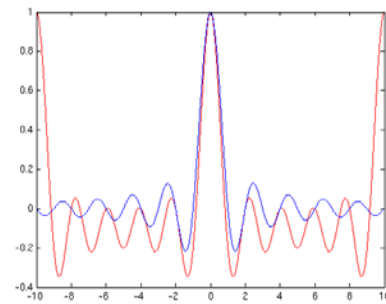
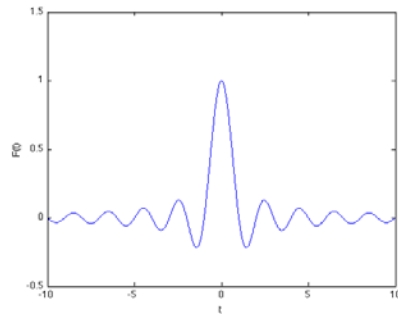


Démonstration: 1) assertion intermédiaire (suite)

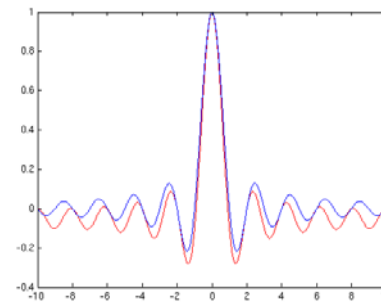
Illustrons l'approximation de la fonction **sinc** avec différentes valeurs de N :

$$\text{sinc}(t) \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sin(2\pi f_j t + \pi / 2)$$

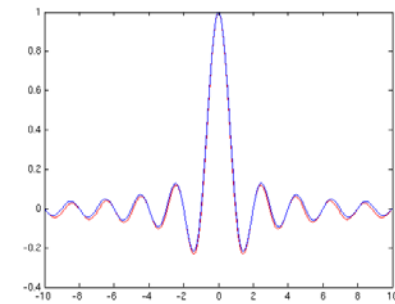
avec $f_j = j / (2N)$.



$N = 5,$



$N = 10,$



$N = 50.$

On voit en effet ci-dessus (en rouge) ce que vaut cette approximation

$$\text{sinc}(t) \simeq \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sin(2\pi f_j t + \pi / 2)$$

Les fréquences $f_j = j / (2N)$ couvrent $[0, 1/2]$ quand j varie de 1 à N , et N tend vers l'infini

La fonction $\text{sinc}(t)$ contient toutes les fréquences de l'intervalle $[0, 1/2]$

Cependant la formule d'interpolation travaille plutôt avec $\text{sinc}((t - nT_e)/T_e)$

$$X_I(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} X(nT_e) \text{sinc}\left(\frac{t - nT_e}{T_e}\right)$$

Le terme $-nT_e$ introduit un déphasage temporel sans conséquence sur l'intervalle des fréquences. Par contre, observons la division par T_e :

$$\text{sinc}(t / T_e) = \text{sinc}(f_e t) \simeq \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sin(2\pi f_j f_e t + \pi / 2)$$

Donc la fonction $\text{sinc}(f_e t)$ contient toutes les fréquences de l'intervalle $[0, f_e/2]$.

La bande passante du signal $\text{sinc}(f_e t)$ est donc $B_{\text{sinc}} = f_e/2$

Or c'est la fonction $\text{sinc}(f_e t)$ qu'on utilise pour reconstruire le signal :

La bande passante B_i du signal interpolé $X_i(t)$

est donc **plus petite ou égale** à $f_e/2$

Première partie de la démonstration:

Si $f_e > 2f_{\max}$ Alors $X_I(t) = X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Idée de la preuve:

- Etant donné que : $f_e > 2f_{\max}$ c'est à dire $f_{\max} < f_e/2$
la bande passante B du signal d'origine $X(t)$ est strictement plus petite que $f_e/2$
(remarque: si $B < f_e/2$ est vrai, alors $B \leq f_e/2$ est aussi vrai)
- **Lemme:** $B_I \leq f_e/2$
- De plus le signal interpolé $X_I(t)$ et le signal original $X(t)$
prennent les mêmes valeurs aux points d'interpolation $nT_e, n \in \mathbb{Z}$.

● Deux signaux dont la bande passante est plus petite ou égale à $B = f_e/2$
et qui coïncident aux points $nT_e, n \in \mathbb{Z}$, coïncident en fait partout !

Conclusion: Si $f_e > 2f_{\max}$, on a bien $X_I(t) = X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Deuxième partie de la démonstration:

Si $X_I(t) = X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, alors $f_e \geq 2f_{\max}$.

Preuve:

- Si $X_I(t) = X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ alors ils ont la même bande passante. (forcément : ce sont les mêmes signaux).
- Or on a vu que la bande passante de $X_I(t)$ est inférieure ou égale à $f_e / 2$
- Donc f_{\max} (de $X(t)$) est inférieure ou égale à $f_e / 2$.

Sous-échantillonnage d'un signal

Lorsqu'on (sous-)échantillonne un signal à une fréquence $f_e < 2f_{\max}$ apparaît l'effet stroboscopique dont nous avons parlé la semaine dernière.

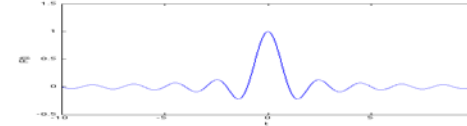
En général, on essaie à tout prix d'éviter cet effet stroboscopique!

Une solution simple, mais coûteuse:

augmenter la fréquence d'échantillonnage jusqu'à satisfaire la condition $f_e > 2f_{\max}$.

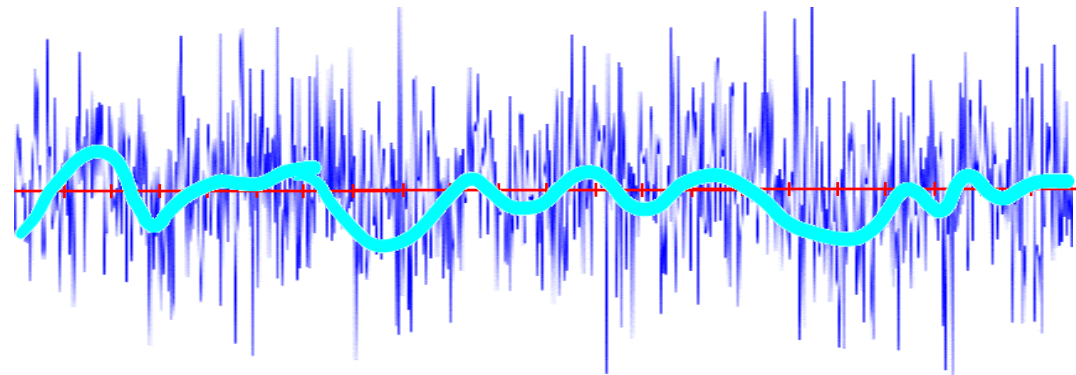
Effet stroboscopique: une autre solution

Il existe des signaux qui contiennent un nombre infini de fréquences (comme la fonction [sinc](#)).



De même, certains signaux contiennent, en théorie, des fréquences qui vont jusqu'à l'infini (en pratique, des fréquences très élevées mais pas toujours utiles).

Pour ces signaux, $f_{\max} = +\infty$:
de tels signaux sont donc *toujours* sous-échantillonnés, quelle que soit la fréquence d'échantillonnage f_e .



Comment éviter l'effet stroboscopique dans ce cas?

Effet stroboscopique: une autre solution

Une solution qui minimise les dégâts consiste à:

filtrer le signal
avant de l'échantillonner !

- .. on filtre le signal avec un filtre passe-bas dont la fréquence de coupure $f_c < f_e/2$.
- .. puis on échantillonne le signal à la fréquence f_e ;
- .. et pour reconstruire le signal, on utilise la formule d'interpolation

On perd ainsi quelques hautes fréquences du signal, mais après ça, la reconstruction est parfaite; on n'a donc pas d'effet stroboscopique.



original 44KHz



sous-éch. 9KHz



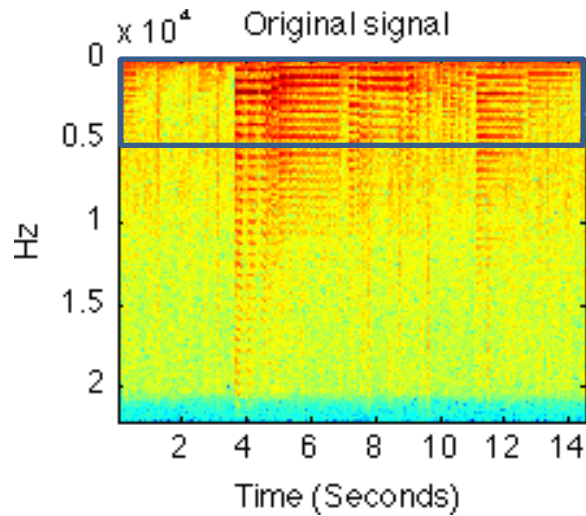
filtré puis sous-éch. KHz



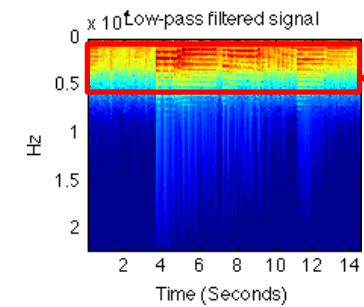
original filtré 44KHz

Effet stroboscopique: une autre solution (2)

original 44KHz

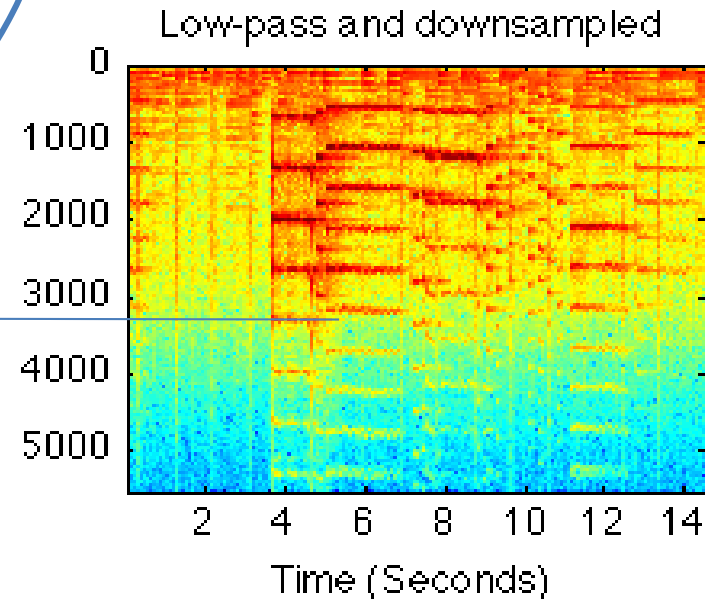
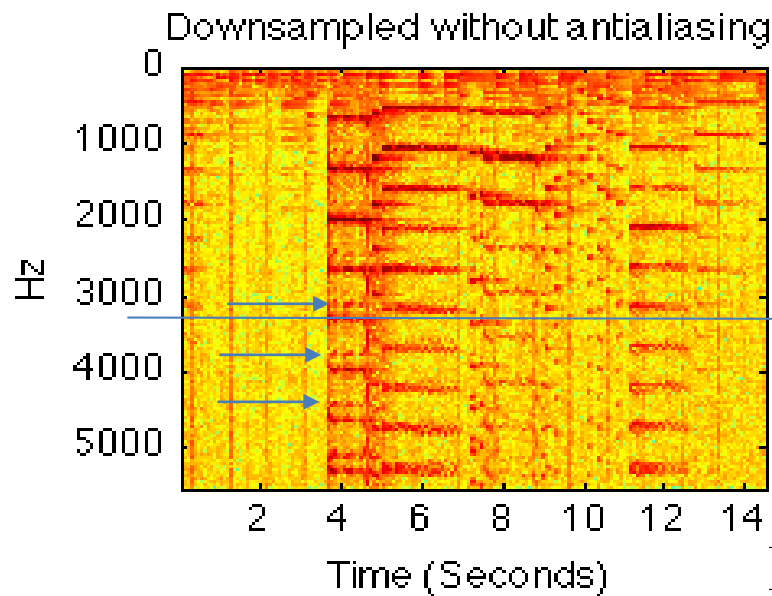


original filtré 44KHz



Diagrammes temps-fréquence:
abscisse: temps
ordonnée: fréquence
couleur = intensité: bleu->rouge

sous-éch.
9KHz



filtré puis
sous-éch.
9 KHz

Echantillonnage de signaux: conclusion

- .., De façon surprenante, un signal à temps continu ($X(t), t \in \mathbb{R}$) peut sous certaines conditions être reconstruit **parfaitement** à partir de sa version échantillonnée ($X(nT_e), n \in \mathbb{Z}$).
- .., Le théorème d'échantillonnage nous donne le **seuil** ($2f_{\max}$) au dessus duquel la fréquence d'échantillonnage f_e est suffisante pour permettre une reconstruction parfaite du signal.
- .., En dessous de ce seuil, l'**effet stroboscopique** apparaît.
- .., On peut éviter l'apparition d'un tel phénomène en **filtrant** le signal avant de l'échantillonner.

Echantillonnage de signaux: 2^e conclusion

L' échantillonnage et la reconstruction de signaux a permis une transformation profonde des télécommunications:

des signaux analogiques, on est passé aux signaux numériques, qui permettent un transfert bien plus efficace de l'information.