Correction Série 4

March 24, 2020

Exercice 1

(1) On peut différencier les trois cas selon la dimension de $\mathrm{span}(\Gamma')$ comme sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

1. Si la dimension est 0 alors $\mathrm{span}(\Gamma') = \{0\}$ et donc $\Gamma' = \{0\}$.

2. Si la dimension est 1 alors il existe un élément $\vec{u}$ de Γ' tel que $\mathrm{span}(\Gamma') = \mathrm{span}(\vec{u})$. On prend un disque $D(0,R)$ tel que $\vec{u} \in D(0,R)$ et l'on choisi $\vec{u}_0$ un élément de norme minimale dans $\Gamma' \cap D(0,R)$ (l'ensemble $\Gamma' \cap D(0,R)$ est fini car il est contenu dans l'ensemble fini $\Gamma \cap D(0,R)$ par le cours). Démontrons par contradiction que $\Gamma' = \vec{u}_0\mathbb{Z}$: supposons qu'il éxiste un élement $\vec{u} \in \Gamma'$ tel que $\vec{u} \notin \vec{u}_0\mathbb{Z}$ ce qui implique que $\vec{u} = \alpha\vec{u}_0$ pour $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ (on peut supposer $\alpha > 0$), alors $(\alpha - \{\alpha\})\vec{u}_0 \in \Gamma' \cap D(0,R)$ mais $|(\alpha - \{\alpha\})\vec{u}_0| = (\alpha - \{\alpha\})\,|\vec{u}_0| < |\vec{u}_0|$ ce qui contredit le fait que $\vec{u}_0$ est de norme minimale.

3. Si la dimension est 2 alors il existe deux élements $\vec{u}, \vec{v} \in \Gamma'$ tels que $\mathrm{span}(\Gamma') = \mathrm{span}(\vec{u}, \vec{v})$. On prend un disque $D(0,R)$ tel que $\vec{u}, \vec{v} \in D(0,R)$ et l'on choisit $\vec{u}_0$ de norme minimale dans $\Gamma' \cap D(0,R)$ et $\vec{u}_1$ de norme minimale dans $\Gamma' \cap D(0,R) \backslash \vec{u}_0\mathbb{R}$, nous allons montrer que $\Gamma' = \Gamma_0 := \vec{u}_0\mathbb{Z} + \vec{u}_1\mathbb{Z}$. Comme dans le cours, on a la tuile $P_0 = \vec{u}_0[-1/2, 1/2[+ \vec{u}_1[-1/2, 1/2[$ qui est un domaine fondamental pour l'action par translation du groupe Γ_0. Tout $\vec{v} \in \Gamma'$ peut donc s'écrire comme $\vec{v} = \vec{v}_0 + (\vec{v} - \vec{v}_0)$ pour $\vec{v}_0 \in \Gamma_0$ et $(\vec{v} - \vec{v}_0) \in P_0 \cap \Gamma'$. Il suffit de démontrer que $P_0 \cap \Gamma' = \{0\}$. Prenons $\vec{v} = s\vec{u}_0 + t\vec{u}_1 \in P_0 \cap \Gamma'$ (donc $s, t \in [-1/2, 1/2[$), on a
$$|\vec{v}| \leq |s\vec{u}_0| + |t\vec{u}_1| \leq \frac{|\vec{u}_0| + |\vec{u}_1|}{2} \leq |\vec{u}_1|\,.$$
Si l'inégalité est stricte alors $\vec{v} \in \vec{u}_0\mathbb{R}$. On a alors $t = 0$, et $|\vec{v}| = |s|\,|\vec{u}_0| \leq \frac{|\vec{u}_0|}{2}$ et donc $\vec{v} = 0$.
Si l'inégalité est exacte alors $|\vec{u}_0| = |\vec{u}_1|$ et $s = t = -1/2$, mais comme $\vec{u}_0$ et $\vec{u}_1$ ne sont pas colinéairs, on a $|\vec{v}| = \left|-\frac{\vec{u}_0}{2} - \frac{\vec{u}_1}{2}\right| < \left|\frac{\vec{u}_0}{2}\right| + \left|\frac{\vec{u}_1}{2}\right| = |\vec{u}_0|$ et donc $\vec{v} = 0$.

(2) On a $\vec{u}' = a\vec{u} + c\vec{v}$ et $\vec{v}' = b\vec{u} + d\vec{v}$ pour $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. On représente la base $\vec{u}, \vec{v}$ de Γ par la matrice $B = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$ et la base $\vec{u}', \vec{v}'$ par $B' = \begin{pmatrix} u_1' & v_1' \\ u_2' & v_2' \end{pmatrix}$ on a alors $B' = BA$ pour la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ qui est invertible (sinon $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$ serait colinéairs). On en déduit que $B = B'A^{-1} = B'\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a & -c \\ -b & d \end{pmatrix}$ et les entrées de la matrice A^{-1} sont fractionnelles car $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ et $\det A \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. De plus on peut choisir $n = \det A$ et alors $n.\Gamma \subset \Gamma'$ car la base $n.\vec{u}, n.\vec{v}$ de $(\det A)\Gamma$ est dans Γ': en effet $(\det A)\vec{u} = a\vec{u}' - b\vec{v}' \in \Gamma'$ et $(\det A)\vec{v} = -c\vec{u}' + d\vec{v}' \in \Gamma'$.

(3) On a $n.\Gamma \subset \Gamma' \subset \Gamma$ et l'on suppose que $n > 1$ (sinon $\Gamma = \Gamma'$ et Γ/Γ' est le groupe unitaire d'ordre $1 \leq n^2 = 1$). Il existe un morphisme $\Phi : \Gamma/n.\Gamma \to \Gamma/\Gamma'$ qui envoie une classe $\gamma + n.\Gamma$ vers la classe $\gamma + \Gamma'$, qui est surjectif: pour toute classe $\gamma + \Gamma' \in \Gamma/\Gamma'$, on a $\Phi(\gamma + n.\Gamma) = \gamma + \Gamma'$. Il nous suffit donc de démontrer qu'il y a au plus n^2 classes dans $\Gamma/n.\Gamma$. Considérons les n^2 classes $k\vec{u} + m\vec{v} + n.\Gamma$ pour $k, m \in \{0, ..., n-1\}$, tout élément $\gamma = k'\vec{u} + m'\vec{v}$ pour $k', m' \in \mathbb{Z}$ est contenu dans la classe $\left(k' - n\left\{\frac{k'}{n}\right\}\right)\vec{u} + \left(m' - n\left\{\frac{m'}{n}\right\}\right)\vec{v} + n.\Gamma$ qui est l'une des n^2 classes considérées car $\left(k' - n\left\{\frac{k'}{n}\right\}\right), \left(m' - n\left\{\frac{m'}{n}\right\}\right) \in \{0, ..., n-1\}$.

Exercice 2

(1) Il nous faut montrer une bijection Ψ entre $\mathrm{End}_{\mathcal{L}_2}(\Gamma)$ et $M_2(\mathbb{Z})$. Tout endomorphism ϕ de Γ est déterminé par les valeurs $\phi(\vec{u}) = a\vec{u} + c\vec{v}$ et $\phi(\vec{v}) = b\vec{u} + d\vec{v}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. On envoie tout ϕ vers la matrice $\Psi(\phi) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et inversément toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ vers l'unique endomorphisme $\phi = \Psi^{-1}(A)$ tel que $\phi(\vec{u}) = a\vec{u} + c\vec{v}$ et $\phi(\vec{v}) = b\vec{u} + d\vec{v}$. Ψ est clairement une bijection. En prenant $\vec{u}$ et $\vec{v}$ comme base de $\mathbb{R}^2$, les matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ correspondent à des fonctions linéaires $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $f(\vec{u}) = a\vec{u} + c\vec{v}$ et $f(\vec{v}) = b\vec{u} + d\vec{v}$ on voit donc que les endomorphismes ϕ sont simplement des restrictions à Γ de ces fonctions linéaires.

(2) Pour chaque paire de matrices $A, B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ le produit $C = AB$ appartient à $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ car les entrées de C sont dans $\mathbb{Z}$ et son determinant satisfait $\det(C) = \det(AB) = \det(A)\det(B) \in \{+1, -1\}$. L'élément unitaire est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et pour toute matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ son inverse est

$$\frac{1}{\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} a & -c \\ -b & d \end{pmatrix}$$

qui est dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ car $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \{+1,-1\}$.

(3) Pour tout automorphisme $\phi \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{L}_2}(\mathbb{Z})$ on pose $A = \Psi(\phi)$ et il nous faut montrer que $\det A \in \{+1,-1\}$. Comme la bijection Ψ enoive la composition de deux endomorphismes vers le produit des matrices, on a

$$\Psi(\phi)\Psi(\phi^{-1}) = \Psi(\phi \circ \phi^{-1}) = \Psi(id) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui implique que $\Psi(\phi^{-1}) = A^{-1}$. Par contradiction, supposons que $\det A \in \mathbb{Z}\backslash\{+1,-1\}$, alors $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \notin \mathbb{Z}$ mais la matrice A^{-1} est une matrice avec entrée en $\mathbb{Z}$ qui doit avoir un determinant en $\mathbb{Z}$. Ceci implique que pour tout automorphisme ϕ son image $\Psi(\phi)$ appartient à $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$.

Dans l'autre sens, toute matrice $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ est envoyée par Ψ^{-1} vers un automorphisme $\phi = \Psi^{-1}(A)$ avec comme inverse $\Psi^{-1}(A^{-1})$. La fonction Ψ restreinte à $\mathrm{Aut}_{\mathcal{L}_2}(\mathbb{Z})$ définit donc une bijection entre $\mathrm{Aut}_{\mathcal{L}_2}(\mathbb{Z})$ et $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$.

(4) Pour toute base $(\vec{u}', \vec{v}')$, on considère l'automorphisme $\phi(x\vec{u} + y\vec{v}) = x\vec{u}' + y\vec{v}'$ avec inverse $\phi^{-1}(x\vec{u}' + y\vec{v}') = x\vec{u} + y\vec{v}$ (comme $(\vec{u}, \vec{v})$ et $(\vec{u}', \vec{v}')$ sont des bases de Γ ces deux morphismes sont bien définis). Comme $\phi(\vec{u}) = \vec{u}' = a\vec{u} + c\vec{v}$ et $\phi(\vec{v}) = \vec{v}' = b\vec{u} + d\vec{v}$, on a $\Psi(\phi) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et comme $\phi \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{L}_2}(\mathbb{Z})$ on a que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ et donc

$$\pm 1 = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

(5) Pour $\vec{u} = (u_1, u_2)^T$ et $\vec{v} = (v_1, v_2)^T$, on prend $\|\vec{u}\|$ comme la longeur de la base du parallelograme (le long de $\vec{u}$) et sa hauteur est donnée par $\frac{|u_2v_1 - u_1v_2|}{\|\vec{u}\|}$ (c'est la longeur de la projection $P\vec{v}$ du vecteur $\vec{v}$ le long du vecteur unitaire $\frac{1}{\|\vec{u}\|}(u_2, -u_1)$ perpendiculaire à $\vec{u}$), l'aire du parallelograme est donc le produit $\|\vec{u}\| \frac{|u_2v_1 - u_1v_2|}{\|\vec{u}\|} = |u_2v_1 - u_1v_2| = \left|\det\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}\right|$.

Par le point (4), toute autre base est de la forme $(\vec{u}', \vec{v}') = (a\vec{u} + c\vec{v}, b\vec{u} + d\vec{v})$ avec $ad - bc = \pm 1$. La matrice des coordonées de la nouvelle base $\begin{pmatrix} u_1' & v_1' \\ u_2' & v_2' \end{pmatrix}$ est donc égale au produit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$ et on a donc

$$\left|\det\begin{pmatrix} u_1' & v_1' \\ u_2' & v_2' \end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}\right| = |ad - bc|\left|\det\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}\right|$$

qui ne dépends pas de la base car $|ad - bc| = 1$.

Exercice 3

(1) Un réseau $L = \vec{u}\mathbb{Z} + \vec{v}\mathbb{Z}$ peut être décrit par la matrice des coordonées de la base $B = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$ deux matrices de bases B_1, B_2 génère le même réseau L s'il éxiste une matrice dans $T \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ telle que $B_1 = B_2 T$. Pour toute matrice $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ l'action de g est la multiplication de la base $B \mapsto gB$, on a clairement la commutativité, les inverses (en prenant la matrice inverse g^{-1}) et l'invariance au choix de base.

(2) Pour deux réseaux L_1 et L_2 de bases B_1 et B_2. Les deux bases sont invertibles ($B_1, B_2 \in g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$) on peut donc prendre $g = B_2 B_1^{-1}$ de telle façon à ce que la base de $g.L_1$ soit $gB_1 = B_2 B_1^{-1} B_1 = B_2$ ce qui implique que $g.L_1 = L_2$.

(3) Les stabilisateurs sont en bijection avec $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$: pour tout $T \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, alors $g = BTB^{-1}$ et un stabilisateur du réseau L avec base B, inversement tout stabilisateur g doit satisfaire $gB = BT$ pour un $T = B^{-1}gB \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$. On peut identifier les réseaux de $\mathcal{L}_2$ par les matrices de bases $B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ modulo la multiplication par la droite par un $T \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$.

(4) Pour un réseau L avec base B on a $\mathrm{vol}(L) = |\mathrm{det}B|$ et donc $\mathrm{Vol}(g.L) = |\mathrm{det}gB| = |\mathrm{det}g|\,\mathrm{Vol}(L)$.

Exercice 4

(1) Si $\gamma + \boldsymbol{P}$ intersecte $C(0,R)$, alors $\gamma + B(0,r_0)$ intersecte aussi $C(0,R)$ et $\gamma + B(0,r_0)$ est contenu dans l'anneau de petit radius $R - 2r_0$ et grand radius $R + r_0$ qui est contenu dans $B(0, R+2r_0)$ et n'intersecte pas $B(0, R-3r_0)$.

(2) L'union U de toute les translates $\gamma + \boldsymbol{P}$ qui sont contenus dans $B(0,R)$ est contenue dans $B(0,R)$ et contient $B(0, R-3r_0)$, on a donc

$$\pi\left(R - 3r_0\right)^2 \leq \mathrm{Aire}(U) \leq \pi R^2$$

or $\mathrm{Aire}(U) = n\mathrm{Aire}(\boldsymbol{P}) = n\mathrm{Vol}(\Gamma)$ où n est le nombre de translates contenus dans $B(0,R)$. Donc $n = \frac{\pi R^2}{\mathrm{Vol}(\Gamma)} + O_\Gamma(R)$.

(3) On a

$$n_0 \pi r^2 \leq \mathrm{Aire}(B(0,R) \cap \Gamma(r)) \leq n_1 \pi r^2$$

ou n_1 est le nombre de boules $\gamma + B(0,r)$ contenues dans $B(0,R)$ et n_1 le nombre qui intersectent $B(0,R)$. Par argument similaire à (2), on a que

$$n_1 = \frac{\pi R^2}{\mathrm{Vol}\,(\Gamma)} + O_\Gamma(R)$$
$$n_2 = \frac{\pi R^2}{\mathrm{Vol}\,(\Gamma)} + O_\Gamma(R)$$

et donc que

$$\frac{\mathrm{Aire}(B(0,R)\cap\Gamma(r))}{\pi R^2} = \frac{\pi r^2}{\mathrm{Vol}\,(\Gamma)} + O_\Gamma\left(\frac{1}{R}\right)$$

qui converge vers $\delta(\Gamma, r) = \frac{\pi r^2}{\mathrm{Vol}(\Gamma)}$.

(4) Il est clairement nécessaire que $r \leq \frac{|\gamma_0|}{2}$ et comme γ_0 est le point du réseau le plus proche, tous les autres points sont à distance $\geq \frac{|\gamma_0|}{2}$ et il n'y a pas d'intersections.

(5) Le volume Vol(Γ) et radius optimal sont invariant sous rotation. Une homothetie envoie $\Gamma = \vec{u}\mathbb{Z} + \vec{v}\mathbb{Z}$ vers $\alpha\Gamma = \alpha\vec{u}\mathbb{Z} + \alpha\vec{v}\mathbb{Z}$ et le volume vers $\alpha^2\mathrm{Vol}(\Gamma)$ alors r_Γ devient αr_Γ et donc $\delta(\alpha\Gamma) = \frac{\pi\alpha^2 r_\Gamma^2}{\alpha^2\mathrm{Vol}(\Gamma)} = \delta(\Gamma)$.

(6) Le radius $r_\Gamma = \frac{1}{2}$ est fixe pour maximiser $\delta(\Gamma)$ il faut donc minimiser $\mathrm{Vol}(\Gamma) = \left|\det\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{Re}z \\ 0 & \mathrm{Im}z \end{pmatrix}\right| = |\mathrm{Im}z|$. On a $\mathcal{D}_{\mathrm{SL}(\mathbb{Z})} = \{z : -\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}z < \frac{1}{2}, |z| > 1\} \cup \{z : -\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}z < 0, |z| = 1\}$ qui est minimal en $z = \omega_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 5

(A) $G^+ = \{1\}$ et $G = G^+$.
(B) $G^+ = \{\pm 1\}$ et $G = G^+$.
(C) $G^+ = \{\pm 1\}$ et $G \neq G^+$ il existe aussi la symmetrie dans l'axe du cafard.
(D) $G^+ = p6$ et $G = G^+$.
(E) $G^+ = p3$ et $G = G^+$.
(F) $G^+ = p4 = \{\pm 1, \pm i\}$ et $G = G^+$.
(G) $G^+ = \{\pm 1\}$ et $G \neq G^+$ il existe aussi la symmetrie dans l'axe du crabe.
(H) $G^+ = p3$ et $G \neq G^+$ il existe aussi la symmetrie dans l'axe du cafard.
(I) $G^+ = p4 = \{\pm 1, \pm i\}$ et $G \neq G^+$ il existe aussi la symmetrie dans l'axe de l'humain.