EPFL Printemps 2020
Geometrie, MATH-125

Série 9

---

1 Reprise des exercices 9, 10, 11 de la Serie 7

– On muni $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel :

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i x_i'$$

pour $\vec{u} = (x_1, \cdots, x_n)$, $\vec{v} = (x_1', \cdots, x_n')$.

– Dans la suite on ecrira "BO" pour "base orthonormee". On notera une BO de $\mathbb{R}^n$ sous la forme $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n)$. La base canonique de $\mathbb{R}^n$ sera notee

$$\mathcal{B}_0 = (\mathbf{e}_{0,1}, \cdots, \mathbf{e}_{0,n}) :$$

$$\mathbf{e}_{0,1} = (1, 0, \cdots, 0), \cdots$$

– Dans cette feuille toutes les isometries seront par defaut des isometries fixant l'origine.

Exercice 9. (Autour de Gramm-Schmidt) Dans $\mathbb{R}^3$.

1. Trouver un BO dont un vecteur engendre le sous-espace W defini par les equations
$$W : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$$
2. Trouver une BO dont deux vecteurs forment une base du sous-espace
$$V = \langle (1, 2, 0), (3, 1, 2) \rangle.$$
3. Trouver une BO dont deux vecteurs forment une base du sous-espace
$$V = \{(x, y, z),\ x + y + z = 0\}.$$
que remarquez vous pour le troisieme vecteur ?

Exercice 10. Soit $V \subset \mathbb{R}^n$ un sous-espace ; on note

$$V^\perp = \{\vec{w} \in \mathbb{R}^n,\ \forall \vec{v} \in V,\ \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0\}$$

l'ensemble des vecteur de $\mathbb{R}^3$ perpendiculaires a tous les vecteur de V.

1. Montrer que $V^\perp$ est un SEV. On veut montrer qu'on a une decomposition en somme directe
$$\mathbb{R}^n = V \oplus V^\perp.$$
En particulier $\dim V + \dim V^\perp = n$.
2. Montrer que $V \cap V^\perp = \{0\}$.
3. Supposons que $\mathbb{R}^n \neq V + V^\perp$. Montrer en utilisant Gramm-Schimdt qu'il existe $w \in \mathbb{R}^n$ qui est perpendiculaire a V et a $V^\perp$ et en deduire une contradiction.
4. Montrer qu'on peut trouver une BO de $\mathbb{R}^n$ dont une partie des vecteurs forme une BO de V et la partie complementaire une BO de $V^\perp$.
5. Soit φ une isometrie lineaire qui laisse V stable ($\varphi(V) \subset V$) ; montrer que $\varphi(V) = V$ et que $\varphi(V^\perp) = V^\perp$. Montrer que la matrice de φ dans la base ci-dessus est une matrice blocs.

Exercice 11. Soit $\mathbf{0} \neq \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur non-nul ; on considere l'application

$$\varphi_{\vec{v}} : \vec{u} \in \mathbb{R}^n \mapsto \vec{u} - 2\frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}\vec{v}.$$

1. Montrer que $\varphi_{\vec{v}}$ est une isometrie.
2. On dit que $\varphi_{\vec{v}}$ est la symetrie orthogonale par rapport a l'hyperplan $\vec{v}^\perp$. Pourquoi ?

2 Isometries lineaires

Exercice 1. Pour chacune des matrices suivantes determiner si elles sont orthogonales et calculer leur determinant.

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 1 & 8 & -4 \\ 4 & -4 & -7 \end{pmatrix},\quad \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ 1 & 8 & -4 \\ 4 & -4 & -7 \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix},\quad \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -9 & -12 & -20 \\ -20 & 15 & 0 \\ -12 & -16 & 15 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. On a vu en cours qu'une application lineaire φ est une isometrie ssi sa matrice M_φ dans une BO donnee est orthogonale :

$$^tM_\varphi . M_\varphi = M_\varphi . {}^tM_\varphi = \mathrm{Id}_n.$$

Montrer de deux manieres differentes, qu'alors la matrice de φ dans n'importe quelle BO est orthogonale.

1. En utilisant le theoreme du cours.
2. Par un changement de base convenable (par une matrice orthogonale).
3. Montrer que cela est faux si on ne suppose pas que $\mathcal{B}$ est orthogonale.
4. Montrer en revanche que pour determiner si cette isometrie est speciale ou pas on peut considerer sa matrice dans n'importe quelle base.

Exercice 3. Soit φ une isometrie et $M = (x_{ij})_{i,j \leqslant n}$ sa matrice associee dans la base canonique. On rappelle que la trace de M est la somme des coefficient diagonaux

$$\mathrm{tr}(M) = \sum_{i=1}^n x_{ii}.$$

1. Montrer que
$$\sum_{i,j \leqslant n}\sum |x_{ij}|^2 = n$$
(utiliser le fait que M est orthogonale).
2. En deduire (utiliser Cauchy-Schwarz) que $|\mathrm{tr}(M)| \leqslant n$.
3. Montrer que si $|\mathrm{tr}(M)| = n$ alors $M = \pm \mathrm{Id}_n$.

Exercice 4. Soit

$$\mathcal{BO} = \{(\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n) \in (\mathbb{R}^n)^n,\ \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \delta_{i=j}\}$$

l'espace de toutes les bases orthonormees (BO) de $\mathbb{R}^n$. On a vu encours qu'une application lineaire est une isometrie ssi est transforme une donnee BO en une autre BO (et alors tout BO est transformee en une BO). Ainsi le groupe des isometries lineaires $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_0$ agit sur $\mathcal{BO}$.

1. Montrer que cette action est transitive et que $\mathcal{BO}$ est un espace principal homogene sous $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_0$ (idee : une application lineaire est determinee par la donnee de sa matrice dans une base). Ainsi on a une bijection
$$\mathcal{BO} \simeq \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_0.$$

2. On note
$$S^{n-1} = \{\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n,\ \|\mathbf{e}\| = 1\}$$
la sphere unite (l'ensemble des vecteurs de longueurs 1). Montrer que $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_0$ agit transitivement sur S^{n-1} (pour cela on pourra voir $\mathbf{e}$ comme le dernier vecteur d'une BO et utilise le principe de completion d'une famille de vecteurs orthonormes en une BO).
3. Soit $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{0,\mathbf{e}}$ le stabilisateur de $\mathbf{e}$ pour cette action. On veut montrer que $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{0,\mathbf{e}}$ est isomorphe au groupe $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^{n-1})_0$. Montrer qu'on peut toujours supposer que $\mathbf{e} = \mathbf{e}_n = (0, \cdots, 0, 1)$.
4. On suppose que $n = 3$. Soit $\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)_{0,\mathbf{e}_3}$. Montrer que la matrice de φ dans la base canonique est de la forme
$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
ou la matrice 2×2 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, est orthogonale. Conclure dans ce cas.
5. Traiter le cas general.

Exercice 5. Soit $\mathbf{0} \neq \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur non-nul ; on rappelle que l'application
$$\varphi_{\vec{v}} : \vec{u} \in \mathbb{R}^n \mapsto \vec{u} - 2\frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}\vec{v}$$
est une isometrie : la symetrie par rapport a l'hyperplan $\vec{v}^{\perp}$.

1. Montrer que $\vec{v}$ est un vecteur propre.
2. Montrer qu'il existe une base orthonormee formee uniquement de vecteurs propres de $\varphi_{\vec{v}}$, ie. une base orthonormee $(\mathbf{e}_i)_{i \leqslant n}$ telle que
$$\varphi(\mathbf{e}_i) = \lambda_i \mathbf{e}_i$$
(ne pas chercher tres loin).
3. Montrer que φ est non speciale.

Exercice 6 (Prolongement des isometries)**.** Soit $V, W \subset \mathbb{R}^n$ des sous-espaces non-nuls et $\varphi_{V,W} : V \to W$ une isometrie lineaire surjective de V vers W (une application lineaire de V vers W et qui preserve la distance euclidienne).

1. Montrer que $\dim V = \dim W$.
2. Montrer qu'il existe une isometrie $\varphi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ qui prolonge φ_V : telle que
$$\forall \vec{v} \in V,\ \varphi(\vec{v}) = \varphi_{V,W}(\vec{v}).$$
(a nouveau il suffit de decrire $\varphi_{V,W}$ via son action sur une base bien choisie de $\mathbb{R}^n$).

3 Isometries de $\mathbb{R}^3$

Exercice 7. (Criteres matriciels pour reconnaitre une isometrie de $\mathbb{R}^3$.) On connait la forme de la matrice d'une isometrie φ dans une BO convenable, mais souvent ce dont on dispose c'est de la matrice $M_{0,\varphi}$ de l'isometrie φ dans la base canonique. Dans cet exercice on explicite des criteres donnant des indices sur la nature de φ a partir de la matrice $M_{0,\varphi}$.

1. Montrer que si φ est une rotation, sa trace appartient a l'intervalle $[-1, 3]$. Que dire si sa trace vaut 3 ? si elle vaut -1 ?
2. Montrer que si φ est une anti-rotation, sa trace appartient a l'intervalle $[-3, 1]$. Que dire si sa trace vaut -3 ? si elle vaut 1 ?
3. Que vaut $\mathrm{tr}(\varphi)$ is φ est une symetrie (par rapport a un plan).
4. Soit $M = M_{0,\varphi}$ la matrice de φ dans la base canonique. Montrer que φ est l'identite ou bien une symetrie (par rapport a un plan, une droite ou encore a l'origine) si et seulement si est une matrice symetrique : ie.
$$^{t}M = M.$$
Pour cela on considerera la matrice de φ dans une base orthonormee convenable et on observera que la matrice de changement de base est elle aussi une matrice orthogonale.
5. Montrer que si φ est une symetrie, son type (identite, centrale, axiale, par rapport a un plan) est completement determine par sa trace.
6. Montrer que si M est une rotation ou une anti-rotation (d'axe $\mathbb{R}\mathbf{e}_1$ et d'angle $\mathrm{c} + \imath\mathrm{s}$ ou θ radians) on a
$$\mathrm{c} = \cos(\theta) = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}M - \det(M)).$$
Cette formule permet donc de determiner $\pm\theta \pmod{2\pi}$ ou si on parle en terme de nombre complexes de module 1 de determine l'angle a conjugaison complexe pres :$\mathrm{c} \pm \imath\mathrm{s}$).

Exercice 8. Pour chacune des matrices suivantes determiner si elles sont orthogonales et si oui quel est la nature de l'isometrie qui leur correspond; si c'est une symetrie determiner le plan, si c'est une (anti-)rotation determiner l'axe $\mathbb{R}\mathbf{e}_1$ (et le cosinus et sinus de l'angle). On pourra "debrousailler "le terrain en utilisant l'exercice precedent.

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 1 & 8 & -4 \\ 4 & -4 & -7 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ 1 & 8 & -4 \\ 4 & -4 & -7 \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -9 & -12 & -20 \\ -20 & 15 & 0 \\ -12 & -16 & 15 \end{pmatrix}$$

Exercice 9. Soit φ et ψ deux isometries affines de parties lineaires φ_0 et ψ_0.

1. Montrer que si φ est d'un certain type (translation, rotation, vissage, symetrie centrale, axiale, planaire, glissee, anti-rotation) alors la conjuguee
$$\varphi' = \mathrm{Ad}(\psi)(\varphi) = \psi \circ \varphi \circ \psi^{-1}$$
est du meme type.
2. Montrer qu'en cas de rotation, anti-rotation ou vissage, l'angle est preserve au signe pres (si l'angle est le nombre complexe de module 1, z le nouvel angle sera $z^{\pm 1}$; ou si l'angle est exprime en radians $\theta \pmod{2\pi}$ le nouvel angle sera $\pm\theta \pmod{2\pi}$). Calculer l'axe de φ' en fonction de ψ et de l'axe de φ.
3. En general, quels sont les points fixes de φ' en fonction de ψ et de ceux de φ.

Exercice 10. Soit φ la transformation affine
$$\varphi(x, y, z) = (X, Y, Z)$$
avec
$$X = \frac{1}{9}(x - 8y + 4z) - 1$$
$$Y = \frac{1}{9}(4x + 4y + 7z) + 2$$
$$Z = \frac{1}{9}(-8x + y + 4z) + 2.$$

1. Determiner la nature de φ.
2. Meme question pour $\psi(x, y, z) = (X', Y', Z')$ avec
$$X' = \frac{1}{3}(x + 2y + 2z) + 1$$
$$Y' = \frac{1}{3}(2x + y - 2z) - 1$$
$$Z' = \frac{1}{3}(2x - 2y + z) - 1.$$
3. Determiner la nature de $\varphi \circ \psi \circ \varphi^{-1}$.

Exercice 11. 1. Determiner la matrice dans la base canonique de la rotation lineaire r d'angle $\pi/6$ et d'axe $\mathbb{R}(1, 1, 1)$.

2. Soit l'isometrie affine $r' = t_{(1,0,-1)} \circ r$. Quelle est la nature de r', ces eventuels points fixes et calculer $(r')^{2018}$.
3. Meme question pour $r'' = t_{(2,2,2)} \circ r$.

Exercice 12 (Exercice 2 Examen 2019)**.** Soient $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. On considère la transformation de l'espace donnée dans la base canonique par $\varphi(x, y, z) = (X, Y, Z)$ avec

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{d}(2x - 2y + az) + 1 \\ Y &= \frac{1}{d}(x + by + 2z) + e \\ Z &= \frac{1}{d}(cx - y + 2z) + f \end{aligned}$$

1. Décrire l'ensemble des $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^5$ tels que φ est un vissage.
2. Même question en demandant que φ soit une anti-rotation.
3. Si φ n'est pas un vissage montrer que $\varphi^6 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.