Math 125 - Chap 3

Espace Euclidiens : Isometries

27 avril 2020

DÉFINITION 3.7. *La longueur euclidienne d'un vecteur* $\vec{u} = (x_1, \cdots, x_n)$ *est donnee par*

$$\|\vec{u}\| = \|(x_1, \cdots, x_n)\| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}.$$

La distance euclidienne dans l'espace affine $\mathbb{R}^n$ *est la fonction*

$$d(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}_{\geqslant 0}$$

donnee pour $P = (x_1, \cdots, x_n)$ *et* $Q = (x'_1, \cdots, x'_n)$ *par*

$$d(P, Q) = ((x_1 - x'_1)^2 + \cdots + (x_n - x'_n)^2)^{1/2} = \|\vec{PQ}\|.$$

$$\vec{u}.\vec{v} = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle := x_1 x_1' + \cdots + x_n x_n'.$$

On a donc

$$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \|\vec{u}\|^2. \tag{2.1}$$

Rappelons que le produit scalaire est

- symetrique:
$$\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{w}, \vec{u} \rangle,$$
- bilineaire:
$$\langle \lambda\vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \lambda\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$$
$$\langle \vec{w}, \lambda\vec{u} + \vec{v} \rangle = \lambda\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle.$$
- Defini-Positif:
$$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geqslant 0 \text{ avec egalite ssi } \vec{u} = \mathbf{0}.$$

On deduit de (2.1), de la symetrie et de la bilinearite, les relations dites de *polarisation*

$$\|\vec{u} \pm \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 \pm 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \tag{2.2}$$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\|) \tag{2.3}$$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \frac{1}{4}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2). \tag{2.4}$$

Isometries

DÉFINITION 3.11. *Une application $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une isometrie si elle preserve la distance euclidienne:*

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}^n,\ d(\varphi(P), \varphi(Q)) = d(P, Q).$$

– *On note*

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) = \{\varphi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n \text{ telles que } \forall P, Q \in \mathbb{R}^n,\ d(\varphi(P), \varphi(Q)) = d(P, Q)\}.$$

l'ensemble des isometries.

– *On note egalement*

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}} = \{\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n),\ \varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0})\},$$

le sous-ensemble des isometries qui fixent le vecteur nul $\mathbf{0}$.

- Isom$(\mathbb{R}^n)$ est stable par composition
- Isom$(\mathbb{R}^n)$ est stable par inversion : si φ = Isom + est inversible (bijective) alors sa reciproque φ^{-1} est aussi une isometrie.

Théorème 3.3. *Une isometrie* $\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ *est une transformation affine (une application affine bijective). Ainsi on a la inclusions*

$$T(\mathbb{R}^n), \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}} \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) \subset A\,\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$$

($A\,\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ *etant le groupe des transformations affines).*

– *En fait* $T(\mathbb{R}^n), \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}$, $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ *sont des sous groupes de* $A\,\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ *et* $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}$ *est un sous-groupe du groupe* $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ *des applications lineaires inversibles.*

– *Le sous-groupe* $T(\mathbb{R}^n)$ *est distingue dans* $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ *et* $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ *est engendre par ses deux sous-groupes,*

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) = T(\mathbb{R}^n) \circ \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}.$$

Plus precisement, toute isometrie φ *se decompose de maniere unique sous la forme*

$$\varphi = t \circ \varphi_0, \; t = t_{\varphi(\mathbf{0})} \in T(\mathbb{R}^n), \; \varphi_0 = t_{-\varphi(\mathbf{0})} \circ \varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}$$

ou φ_0 *est la partie lineaire de* φ.

THÉORÈME 3.4. *Les isometries fixant l'origine* $\mathbf{0}$ *sont des applications lineaires sur* $\mathbb{R}^n$*: si* $\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}$ *on a pour tout* $\vec{u} = (x_1, \cdots, x_n)$, $\vec{v} = (x_1', \cdots, x_n')$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\varphi(\lambda\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v}).$$

Ces applications sont bijectives:

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}} \subset \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n).$$

Preuve : On a vu que φ est lineaire.

φ est bijective : comme φ est lineaire il suffit de mq φ est injective.

Lemme : Soit φ une isometrie alors φ est injective

Lemme: Soit φ une isometrie alors φ est injective

Preuve : soient $P, Q \in \mathbb{R}^n$ tq

$$\varphi(P) = \varphi(Q)$$

$$0 = d(\varphi(P), \varphi(Q)) = d(P, Q) \Rightarrow P = Q$$

$\Longrightarrow \varphi$ est injective.

$\square$

Preuve du Thm 3.3 :

- $T(\mathbb{R}^n), \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_0 \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$

  sont des sous gpes du gpe des transformations affines.

- Soit $\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ on va decomposer φ est une translation et une isometrie fixant $0 \Longrightarrow \varphi$ est affine, φ bijective et cela permet de conclure que φ est bij $\Longrightarrow$ $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ est un sous gpe de $AGL(\mathbb{R}^n)$.

Posons $\varphi_0 := t_{-\varphi(0)} \circ \varphi$ est une isometrie (car composée de 2 isometries)

$$\varphi_0(0) = t_{-\varphi(0)}(\varphi(0)) = -\varphi(0) + \varphi(0) = 0$$

φ_0 est une isometrie fixant 0

$$\varphi_0 = t_{-\varphi(0)} \circ \varphi$$

$t_{\varphi(0)} \circ$:

$$t_{\varphi(0)} \circ \varphi_0 = \varphi .$$

$\Rightarrow \varphi$ est affine, car composée d'application affine

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) < AGL(\mathbb{R}^n)$$

on a vu pour les applications affines

$$T(\mathbb{R}^n) \lhd AGL(\mathbb{R}^n)$$

a fortiori $T(\mathbb{R}^n) \lhd \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$

en tant que transformation affine la décomposition

$$\varphi = t \circ \varphi_0 = t \circ \mathrm{lin}(\varphi) \text{ est unique.}$$

$\square$

Pour comprendre $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ il suffit de comprendre $T(\mathbb{R}^n)$ facile

$\underline{\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)}_0$ pas trop dur grâce à AL.

Corollaire 3.5. *L'application*

$$\mathrm{lin} : \cdot_0 : \begin{array}{ccc} \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) & \mapsto & \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}} \\ \varphi & \mapsto & \varphi_0 \end{array}$$

qui a une isometrie associe sa partie lineaire est un morphisme de groupes dont le noyau est le groupe (distingue) des translations $T(\mathbb{R}^n)$

Théorème 3.5. *Soit* $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *une application lineaire. Alors* φ *est une isometrie ssi l'une des conditions suivantes est satisfaite:*

- (1) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\langle \varphi(\vec{u}), \varphi(\vec{v}) \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.
- (2) $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\|\varphi(\vec{v})\| = \|\vec{v}\|$.
- (3) φ *est inversible et* $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\langle \varphi(\vec{u}), \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \varphi^{-1}(\vec{v}) \rangle$. adjonction
- (4) φ *transforme la base canonique* $(\mathbf{e}_i^0)_{i \leqslant n}$ *en une base orthonormee* $(\varphi(\mathbf{e}_i^0))_{i \leqslant n}$.
- (5) φ *transforme toute base orthonormee* $(\mathbf{e}_i)_{i \leqslant n}$ *en une base orthonormee* $(\varphi(\mathbf{e}_i))_{i \leqslant n}$.

Preuve: Si $\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_0 \Rightarrow \varphi$ preserve $\langle\,,\rangle$ et $\|\ \|$

- si φ preserve $\|\ \|$ et est lineaire alors φ est une isom

$\forall P, Q \in \mathbb{R}^n$ $d(\varphi(P), \varphi(Q)) = \|\overrightarrow{\varphi(P)\varphi(Q)}\|$

$$\overrightarrow{\varphi(P)\varphi(Q)} = \varphi(Q) - \varphi(P) = \varphi(Q-P)$$

φ est linéaire

$$d(\varphi(P), \varphi(Q)) = \| \varphi(Q-P) \| = \| Q-P \|$$

$$= d(P,Q) \, . \rightsquigarrow \varphi = \text{Isom linéaire.}$$

- Relation d'adjonction : $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

$$\langle \varphi(\vec{u}), \vec{v} \rangle = \langle \varphi^{-1}(\varphi(\vec{u})), \varphi^{-1}(\vec{v}) \rangle$$

$$= \langle \vec{u}, \varphi^{-1}(\vec{v}) \rangle$$

Si φ lin, inversible et vérifie l'adjonction

$\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n \quad \langle \varphi(\vec{u}), \varphi(\vec{v}) \rangle \qquad \boxed{\vec{V} := \varphi(\vec{v})}$

$= \langle \varphi(\vec{u}), \vec{V} \rangle = \langle \vec{u}, \varphi^{-1}(\vec{V}) \rangle$

$= \langle \vec{u}, \varphi^{-1}(\varphi(\vec{v})) \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$

- soit B^0 la base canonique

B^0 est orthonormée $B^0 = (e_1^0, \dots, e_n^0)$

$e_1^0 = (1, 0, \dots, 0) \dots \quad e_n^0 = (0, 0, \dots, 0, 1)$

$$\langle e_i^\circ, e_j^\circ \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} = \delta_{ij}$$

symbole de Kronecker

soit $\varphi(B^\circ) = \left(\varphi(e_i^\circ)\right)_{i=1,\dots,n}$

l'image de la base canonique.

$$\langle \varphi(e_i^\circ), \varphi(e_j^\circ) \rangle = \langle e_i^\circ, e_j^\circ \rangle = \delta_{ij}$$

$\varphi(B^\circ)$ et une BO.

<u>Reciproquement</u> : soit φ linéaire tq

$\varphi(B^\circ) = (\varphi(e_i^\circ))_{1 \leq n}$ est une BO

alors $\varphi \in Isom(\mathbb{R}^n)_0$.

Soit $\vec{u}$ mq $\|\varphi(\vec{u})\|^2 = \|\vec{u}\|^2$))

$$\langle \varphi(\vec{u}), \varphi(\vec{u}) \rangle = \langle \varphi(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^\circ), \varphi(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j^\circ) \rangle$$

$\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^\circ$ on développe par bilinéarité

$$\left\langle \varphi\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\Big), \varphi\Big(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j\Big) \right\rangle =$$

φ lineaire

$$= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(e_i), \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \varphi(e_j) \right\rangle =$$

bilineaire

$$= \sum_{i,j \leq n} \lambda_i \lambda_j \underbrace{\langle \varphi(e_i), \varphi(e_j) \rangle}_{=}$$

$$= \sum_{i,j \leq n} \lambda_i \lambda_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$$

$$= \|\vec{v}\|^2$$

Ce calcul est en fait valable pour toute BO : une base $(e_i)_{i \leq n}$ est une BO ssi

$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ et on reprend le m̂ calcul en decomposant un vecteur $\vec{v}$ ds la BO $(e_i)_{i \leq n}$.

$\square$

Matrice d'une isometrie lineaire:

$$M_\varphi = (x_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

avec pour $1 \leqslant j \leqslant n$

$$\varphi(\mathbf{e}_j^0) = \sum_{i=1}^{n} x_{i,j}\mathbf{e}_i^0.$$

Transposée d'une matrice $\qquad M = (x_{ij})_{i,j\leq n}$

$${}^tM = (x_{ji})_{i,j\leq n} \qquad ({}^tM)_{ij} = M_{ji}.$$

THÉORÈME 3.6. *L'application lineaire φ est une isometrie ssi*

$$M_\varphi . {}^tM_\varphi = {}^tM_\varphi . M_\varphi = \mathrm{Id}_n. \tag{4.1}$$

$$\begin{pmatrix} \ddots & x_{ij} \\ & \ddots \end{pmatrix} \xrightarrow{t} \begin{pmatrix} \ddots & \\ x_{ij} & \ddots \end{pmatrix}$$

En d'autres termes

$$M^{-1} = {}^tM.$$

Si M_φ est de cette forme on a alors

$$\det(M) = \pm 1.$$

Preuve : Soit φ une isometrie lineaire et M sa matrice. Soit $B = (e_i)_{i \leq n}$ la base canonique (plus generalement n'importe quelle BO)

$\forall j \leq n \quad \varphi(e_j) = x_{1j} e_1 + \dots + x_{nj} e_n$

Comme φ est une isometrie

$(\varphi(e_j))_{j \leq n}$ est une BO : $\forall j, k \leq n$

$$\langle \varphi(e_j), \varphi(e_k) \rangle = \delta_{jk}$$

$$= \langle x_{1j} e_1 + \dots + x_{nj} e_n , x_{1k} e_1 + \dots + e_{nk} e_n \rangle$$

$$= \langle x_{1j} e_1 + \dots + x_{nj} e_n , x_{1k} e_1 + \dots + e_{nk} e_n \rangle$$

$$= \sum_{i,i' \leq n} x_{ij} x_{i'k} \langle e_i , e_{i'} \rangle = \delta_{jk}$$

$$\langle e_i , e_{i'} \rangle = \delta_{ii'} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = i' \\ 0 \text{ si } i \neq i' \end{cases}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_{ij} x_{ik} = \sum_{i=1}^{n} {}^t x_{ji} \cdot x_{ik}$$

$$x_{ij} = ({}^t M)_{ji} = {}^t x_{ji} \qquad = ({}^t M . M)_{jk}$$

$$\forall j,k \quad ({}^tM.M)_{j,k} = \delta_{jk}$$

$$\Longleftrightarrow \quad {}^tM.M = I_{dn}$$

$\Longrightarrow$ M est inversible et $M^{-1} = {}^tM$

$$\Longrightarrow \quad M.{}^tM = I_{dn}$$

$$\det(M.{}^tM) = \det(I_{dn}) = 1 = \det M . \det {}^tM$$

$$\det M.{}^tM = 1 = \det M . \det {}^tM$$

$$= (\det M)^2 \quad \text{car}$$

$$\det {}^tM = \det M$$

$$\Longrightarrow \det M = \pm 1.$$

- Reciproquement on veut mq si

${}^tM.M = Id_n \Longrightarrow \varphi$ est une isometrie

Mais le calcul précédent mq que

$${}^tM.M = I_{dn} \Longrightarrow \langle \varphi(e_j), \varphi(e_k) \rangle = \delta_{jk}$$

$$\Longrightarrow (\varphi(e_j))_{j \leq n} \text{ est BO}$$

$$\Longrightarrow \varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_0 .$$

$\square$

Matrices Orthogonales

$$^tM.M = {}^tM.M = Id_n$$

DÉFINITION 3.13. *Une matrice M verifiant (4.1) est appellee matrice orthogonale. Si* $\det M = +1$ *cette matrice est dite speciale et si* $\det M = -1$ *cette matrice est dite non-speciale.*

On note respectivement

$$\mathrm{O}_n(\mathbb{R}), \mathrm{O}_n(\mathbb{R})^+ = \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}), \mathrm{O}_n(\mathbb{R})^- \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$$

l'ensemble des matrices orthogonales, orthogonales speciales et orthogonales non-speciales.

DÉFINITION 3.14. *Une isometrie lineaire φ sera dites speciale ou non-speciale suivant que sa matrice M_φ dans la base canonique est speciale ou non-speciale.*

On note respectivement

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}^+ = \mathrm{SO}(\mathbb{R}^n),\ \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}^- \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}$$

l'ensemble des isometries speciales ou non-speciales.

THÉORÈME 3.7. *L'ensemble des matrices orthogonales* $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ *est un sous-groupe de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *isomorphe a* $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}$.

L'ensemble des matrices orthogonales speciales $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{O}_n(\mathbb{R})^+$ *est un sous-groupe distingue de* $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ *d'indice* 2 *et* $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}^+ \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}$ *est un sous-groupe distingue d'indice* ~~*isomorphe*~~. 2.

L'ensemble des matrices orthogonales non-speciales $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})^-$ *est une orbite de* $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})^+$ *et de meme* $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}^-$ *est une orbite de* $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}^+$.

On a pour toute matrice non-speciale $M^- \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})^-$ *(toute isometrie non-speciale)* $\sigma \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}^-$

$$\mathrm{O}_n(\mathbb{R})^- = M^-.\mathrm{O}_n(\mathbb{R})^+ = \mathrm{O}_n(\mathbb{R})^+.M^-, \tag{4.2}$$

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}^- = \sigma.\,\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}^+ = \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}^+.\sigma$$

et

$$\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{O}_n(\mathbb{R})^+ \sqcup M^-.\mathrm{O}_n(\mathbb{R})^+,$$

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}} = \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}^+ \sqcup \sigma.\,\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}^+.$$

$SO_n(\mathbb{R})$ est un sous gpe distingué.

$\det : O_n(\mathbb{R}) \twoheadrightarrow \{\pm 1\}$ est surjective

: il existe des matrices ortho de det -1

$$\begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$ est ortho non speciale.

$\rightarrow$ l'indice $\left| O_n(\mathbb{R}) / SO_n(\mathbb{R}) \right| = |\{\pm 1\}| = 2$

On applique isomorphisme inverse de

$$GL(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\sim} GL_n(\mathbb{R})$$

au sous gpe $SO_n(\mathbb{R})$ son image est l'ensemble des isometries speciale qui est un sous gpe distingue de

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_0^+ \triangleleft \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_0$$

et on fait de $\hat{m}$ pour les matrices ortho non-speciales. $\square$

On a un isomorphisme de groupes entre $GL(\mathbb{R}^n) \longleftrightarrow GL_n(\mathbb{R})$

$$\varphi \longleftrightarrow M_\varphi$$

et si on restreint cet isom au sous-gpe $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_0$ l'image c'est $O_n(\mathbb{R})$ qui est donc un sous-gpe de $GL_n(\mathbb{R})$

- $SO_n(\mathbb{R}) = \ker\left(\det : O_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \{\pm 1\} < \mathbb{R}^\times\right)$

Orientation:

PROPOSITION 3.13. *Le groupe* $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}$ *agit simplement transitivement* $\mathcal{BO}_n$*: soit* $\mathcal{B}_0 = (\mathbf{e}_{0,1}, \cdots, \mathbf{e}_{0,n})$ *la base canonique, on a*

$$\mathcal{BO}_n = \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}.\mathcal{B}_0.$$

$\mathbb{R}^n$

Le groupe $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)^+_{\mathbf{0}}$ *agit avec deux orbites,*

$$\mathcal{BO}^+_n = \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)^+_{\mathbf{0}}.\mathcal{B}_0 = \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)^+_{\mathbf{0}}.(\mathbf{e}_{0,1}, \cdots, \mathbf{e}_{0,n}) \text{ et } \mathcal{BO}^-_n = \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)^+_{\mathbf{0}}.(-\mathbf{e}_{0,1}, \cdots, \mathbf{e}_{0,n}).$$

DÉFINITION 3.16. *L'orbite* $\mathcal{BO}^+$ *est l'ensemble des bases orientees positivement (ou simplement des bases orientees); l'autre orbite L'orbite* $\mathcal{BO}^-$ *est l'ensemble des bases orientees negativement. On utilisera les acronymes BOO et BOON pour designer de telles bases orientes positivement ou negativement.*

4.4. Proprietes spectrales des isometries.

Proposition 3.15. *Soit φ une isometrie sur $\mathbb{R}^n$ alors toute valeur propre reelle si elle existe vaut ± 1.*

linéaire

Preuve : Soit φ une isom supposons que $\lambda \in \mathbb{R}$ est vp de vecteur propre $e \neq 0 \in \mathbb{R}^n$

$$\varphi(e) = \lambda e$$

$$\langle \varphi(e), \varphi(e) \rangle = \langle \lambda e, \lambda e \rangle = \lambda^2 \langle e, e \rangle$$

$$\underset{\varphi \text{ isom}}{=} \langle e, e \rangle$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = 1 \quad \square$$

Proposition 3.16. *Supposons n impair et soit φ une isometrie lineaire alors φ possede une valeur propres reelle et un vecteur propre de longueur 1: il existe $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|\mathbf{e}\| = 1$ et $\lambda = \pm 1$ avec*

$$\varphi(\mathbf{e}) = \lambda.\mathbf{e}.$$

De plus si φ est speciale $\det M_\varphi = +1$ *alors $+1$ est valeur propre.*

Preuve: On va mq φ admet une valeur propre dans $\mathbb{R}$

On regarde le polynome characteristique de φ (ou de M)

$$P_\varphi(X) = \det(X.\mathrm{Id}_n - M_\varphi)$$

$$= \begin{vmatrix} X - x_{11} & & & -x_{1n} \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ -x_{n1} & & & X - x_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= X^n - (x_{11} + \dots + x_{nn}) X^{n-1} + \dots\dots + (-1)^n \det M$$

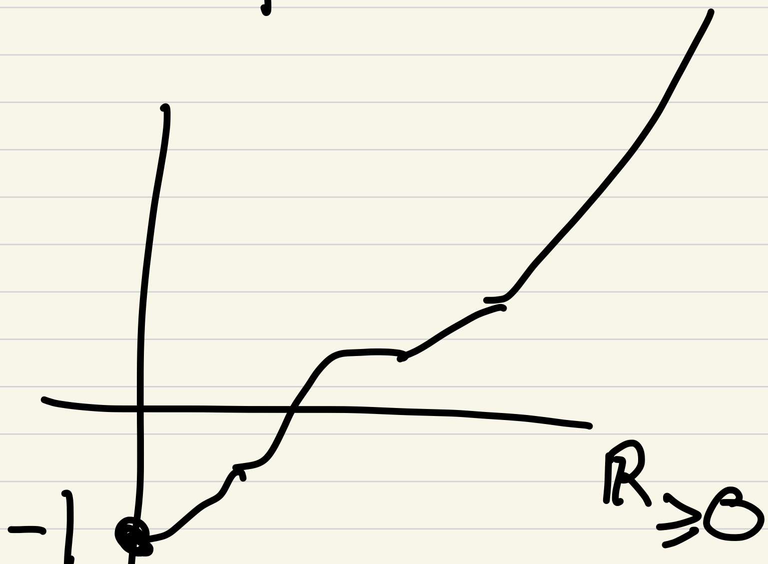
c'est un polynome à coefs réel unitaire de degré impair

$$\lim_{x \to \pm\infty} P_M(x) = \pm\infty \text{ car } n \text{ impair}$$

par le thm des VIs il s'annule
en un point de $\mathbb{R}$ et ce zero λ
est une valeur propre de M et
donc admet un vecteur propre $e \neq 0$
et $\frac{e}{\|e\|}$ est un vecteur propre unitaire
de longueur 1. $\square$

si φ est est speciale $\det M = +1$

$P_M(0) = (-1)^n \times 1 = -1$ (n est impair)



par le TVIs il existe $\lambda > 0$ tq $P_M(\lambda) = 0$

φ admet une vp reelle strictement > 0

$\Rightarrow +1$ est vp.