Math 125 - 25 mai 2020

Groupes finis d'Isometries

Groupes finis d'isométries

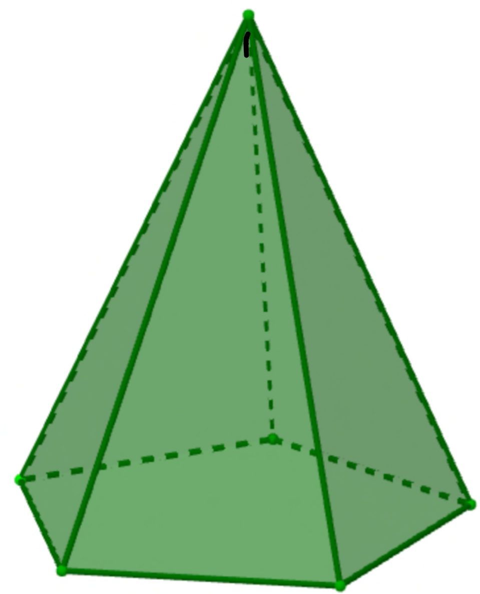
d'isometrie

Théorème 4.2. *Soit $G \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)^+$ un groupe fini d'isometries speciales, alors en tant que groupe abstrait G est isomorphe a l'un des groupes suivant:*

(1) *Un groupe cyclique.*
(2) *Un groupe dihedral.*
(3) *Le groupe alterne alterne $\mathfrak{A}_4$ (d'ordre 12.)*
(4) *Le groupe symetrique $\mathfrak{S}_4$ (d'ordre 24.)*
(5) *Le groupe alterne $\mathfrak{A}_5$ (d'ordre 60.)*

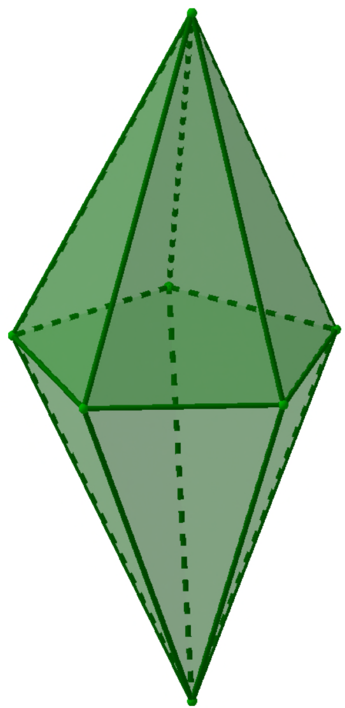
et chacun des groupes ci-dessus peut-etre realise comme groupe fini d'isometries lineaires speciales de $\mathbb{R}^3$. Par ailleurs tout groupe fini d'isometries speciales est conjugue a l'un de ces groupes par une isometrie speciale.

(1) *Si G est cyclique d'ordre $n \geqslant 3$ alors G est realisable comme le groupe des isometries speciales preservant un cone polyhedral convexe a $n+1$ sommets dont la base est un polygone regulier a n sommets et dont le dernier sommet est sur l'axe perpendiculaire au plan du polygone et passant par son centre. Si $n = 3$, on supposeque les aretes ne sont pas toutes de meme longueur: ie. que ce cone n'est PAS un tetraedre regulier.*



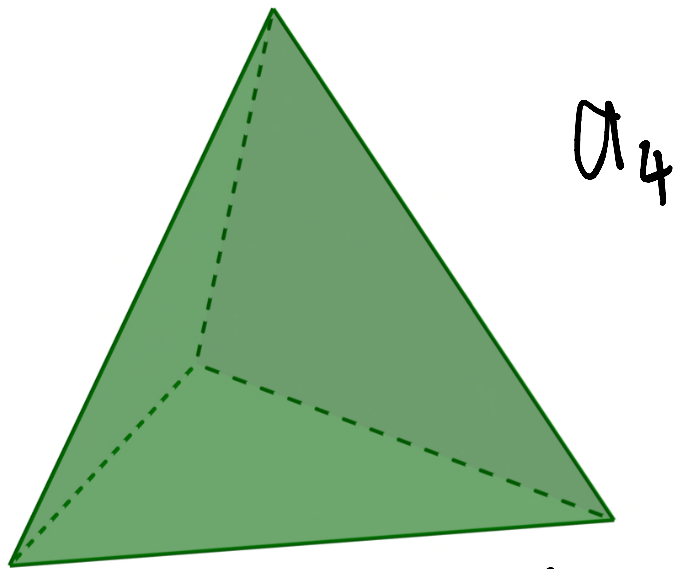
C_5

(2) *Si* G *est dihedral d'ordre* $2n \geqslant 6$ *alors* G *est le groupe des isometries speciales d'un double-cone obtenu comme la reunion d'un cone de base un polygone regulier a* n *cotes comme ci-dessus et de son symetrique par rapport au plan de la base du cone. Si* $n = 4$, *on suppose, de plus, que les aretes ne sont pas toutes de meme longueur: ie. que ce double cone n'est PAS un octahedre regulier.*



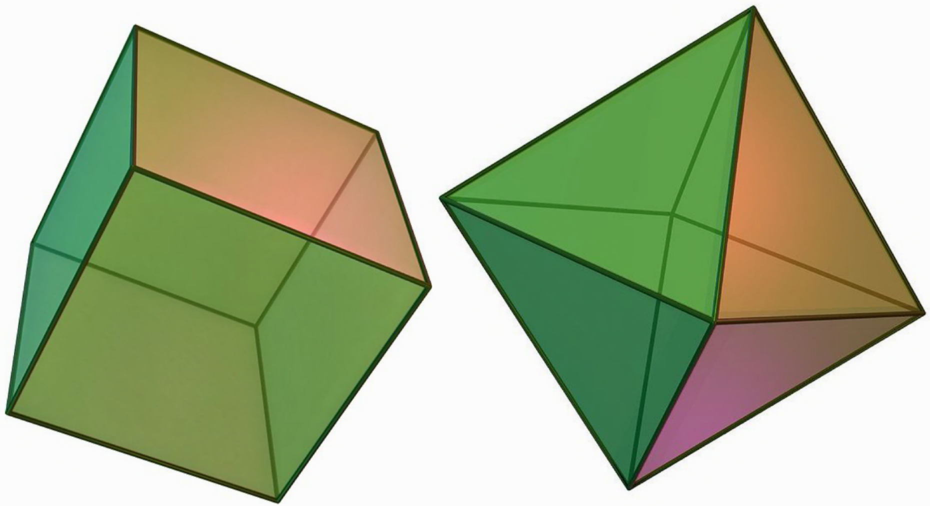
D^{10}

(3) *Si G est isomorphe au groupe alterne $\mathfrak{A}_4$ alors G est le groupe des isometries speciales d'un tetraedre regulier.*



$f=4 \quad a=6 \quad s=4$

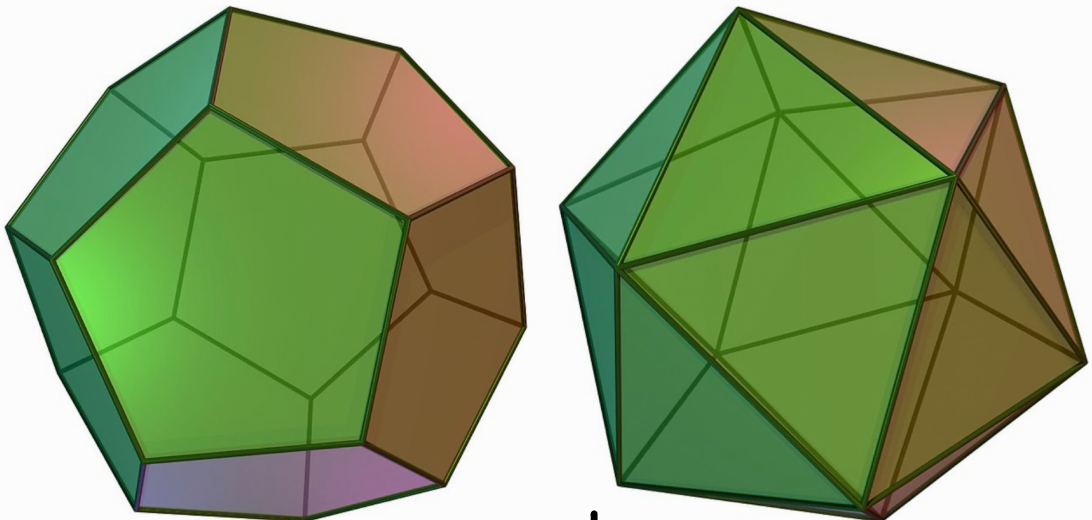
(4) *Si G est isomorphe au groupe symetrique $\mathfrak{S}_4$ alors G est le groupe des isometries speciales d'un cube (ainsi que d'un octaedre regulier).*



$\mathfrak{S}_4$

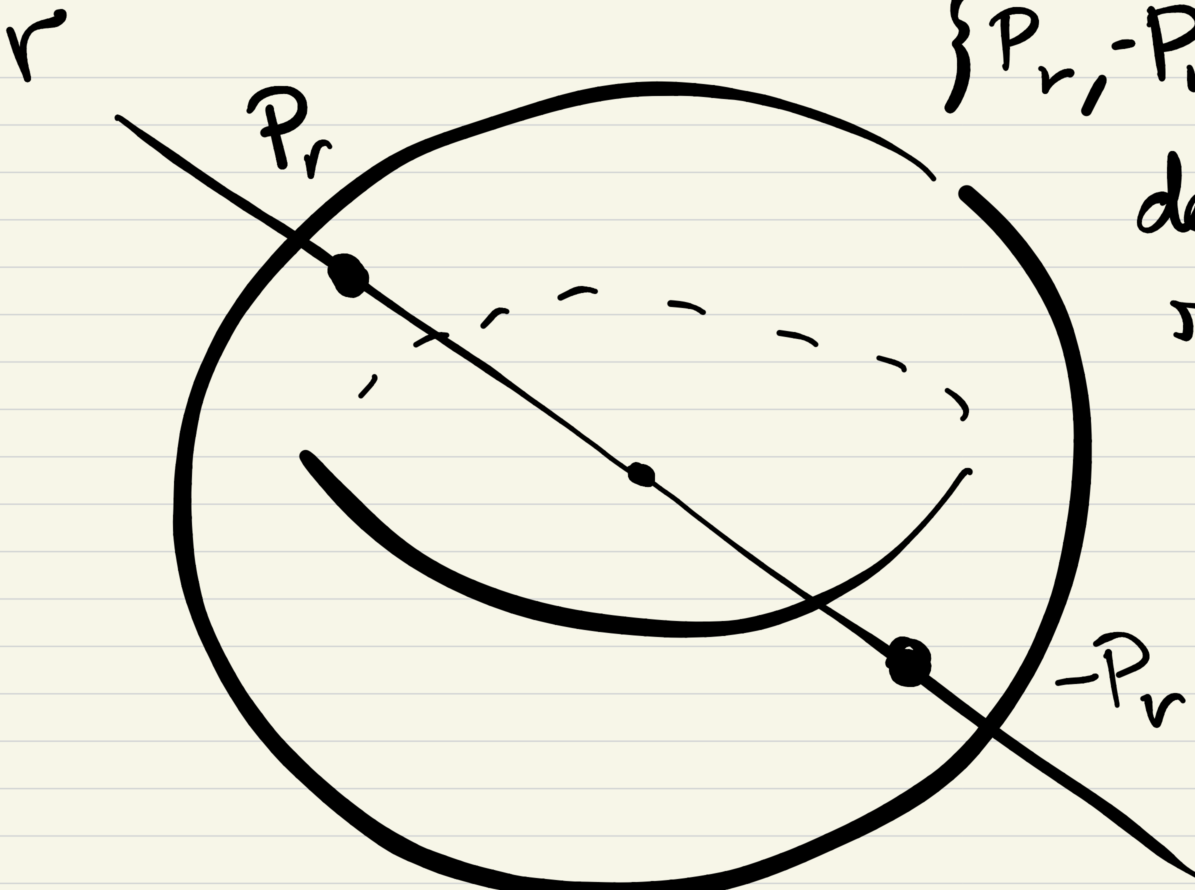
$f = 6 \quad a = 12 \quad s = 8 \qquad\qquad s = 8 \quad a = 12 \quad f = 6$

(5) *Si G est isomorphe au groupe alterne $\mathfrak{A}_5$ alors g est le groupe des isometries speciales d'un dodecaedre regulier (et d'un l'icosaedre regulier).*



$\mathfrak{A}_5$

$f = 12 \quad a = 30 \quad a = 20 \;\Big|\; f = 20 \quad a = 30 \quad s = 12$



$\{P_r, -P_r\}$ les "pôles" de la rotation r.

Proposition 4.2. *Le G-ensemble X n'a que deux ou trois orbites et les seules possibilites sont les suivantes:*

	o	s_1	s_2	s_3	$\lvert G\rvert$	$\lvert\mathcal{O}_1\rvert$	$\lvert\mathcal{O}_2\rvert$	$\lvert\mathcal{O}_3\rvert$	$\lvert X\rvert$	
cyclique	2	n	n		n	1	1		2	$n \geq 2$
dihedral	3	2	2	n	$2n$	n	n	2	$2n+2$	$n \geq 2$
A_4	3	2	3	3	12	6	4	4	14	
S_4	3	2	3	4	24	12	8	6	26	
A_5	3	2	3	5	60	30	20	12	62	

linéaires

LEMME 4.1. *Soit G un groupe fini non-trivial de rotations ayant toutes le meme axe, alors G est cyclique.*

Preuve : Soit D l'axe commun à toutes les rotations de G et $D^{\perp}$ qui est un plan passant par $\vec{O}$

Les rotations du groupe si on regardent leur matrice dans une BON dont un vecteur est le long de D et les autres sont $\perp$ à D

sont de la forme

$$M_{B,r} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix} \quad \text{avec } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SO_2(\mathbb{R})$$

et une fois ce choix fait

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ détermine la rotation r

$\Rightarrow$

on a un morphisme injective

$$G \hookrightarrow SO_2(\mathbb{R})$$
$$r \longmapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

G est indentifie à un gpe fini d'isometries speciales lineaires du plan $\mathbb{R}^2$

donc cyclique. $\square$

en s'expriment en radiants
les rotation de G sont d'angle
des multiples de $\dfrac{2\pi}{|G|}$ rads.

$\rightsquigarrow$ (les angles complexes associés
sont les racine $|G|$-ièmes de
l'unité)

Proposition 4.2. *Le G-ensemble X n'a que deux ou trois orbites et les seules possibilites sont les suivantes:*

o	s_1	s_2	s_3	$\|G\|$	$\|\mathcal{O}_1\|$	$\|\mathcal{O}_2\|$	$\|\mathcal{O}_3\|$	$\|X\|$
2	n	n		n	1	1		2
3	2	2	n	$2n$	n	n	2	$2n+2$
3	2	3	3	12	6	4	4	14
3	2	3	4	24	12	8	6	26
3	2	3	5	60	30	20	12	62

Proposition 4.3. *Supposons qu'on soit dans le premier cas*

$$|X| = 2,\ o = 2,\ s_1 = n, s_2 = n,\ |G| = n,\ |X| = 2$$

alors $X = \{P, -P\}$ *et* G *est un groupe cyclique de rotations autour de l'axe* $\mathbb{R}.\mathbf{0}\vec{P} = (-P, P)$.

Preuve : X possede 2 orbites de taille 1

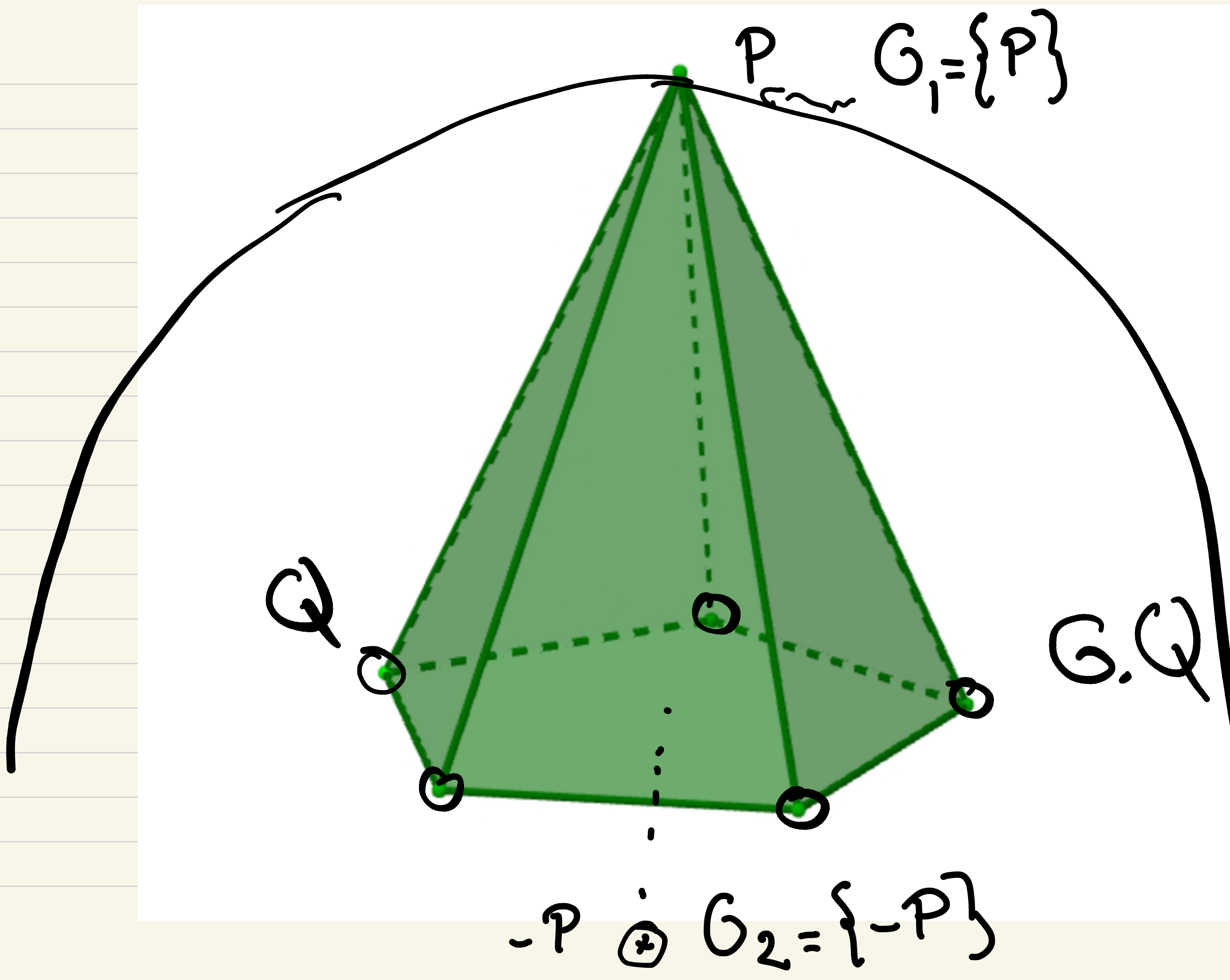
$\{P\} = O_1 \quad \{Q\} = O_2$

P et Q sont des poles et $-P$ et $-Q$ sont les poles opposes

$Q = -P$ et G fixe P et $-P$

G est un ensemble de rot d'axe $(P, -P)$

et est cyclique.



P
$G_1 = \{P\}$
Q
$G.Q$
$-P$
$G_2 = \{-P\}$

Proposition 4.2. *Le G-ensemble X n'a que deux ou trois orbites et les seules possibilites sont les suivantes:*

o	s_1	s_2	s_3	$\|G\|$	$\|\mathcal{O}_1\|$	$\|\mathcal{O}_2\|$	$\|\mathcal{O}_3\|$	$\|X\|$
2	n	n		n	1	1		2
3	2	2	n	$2n$	n	n	2	$2n+2$
3	2	3	3	12	6	4	4	14
3	2	3	4	24	12	8	6	26
3	2	3	5	60	30	20	12	62

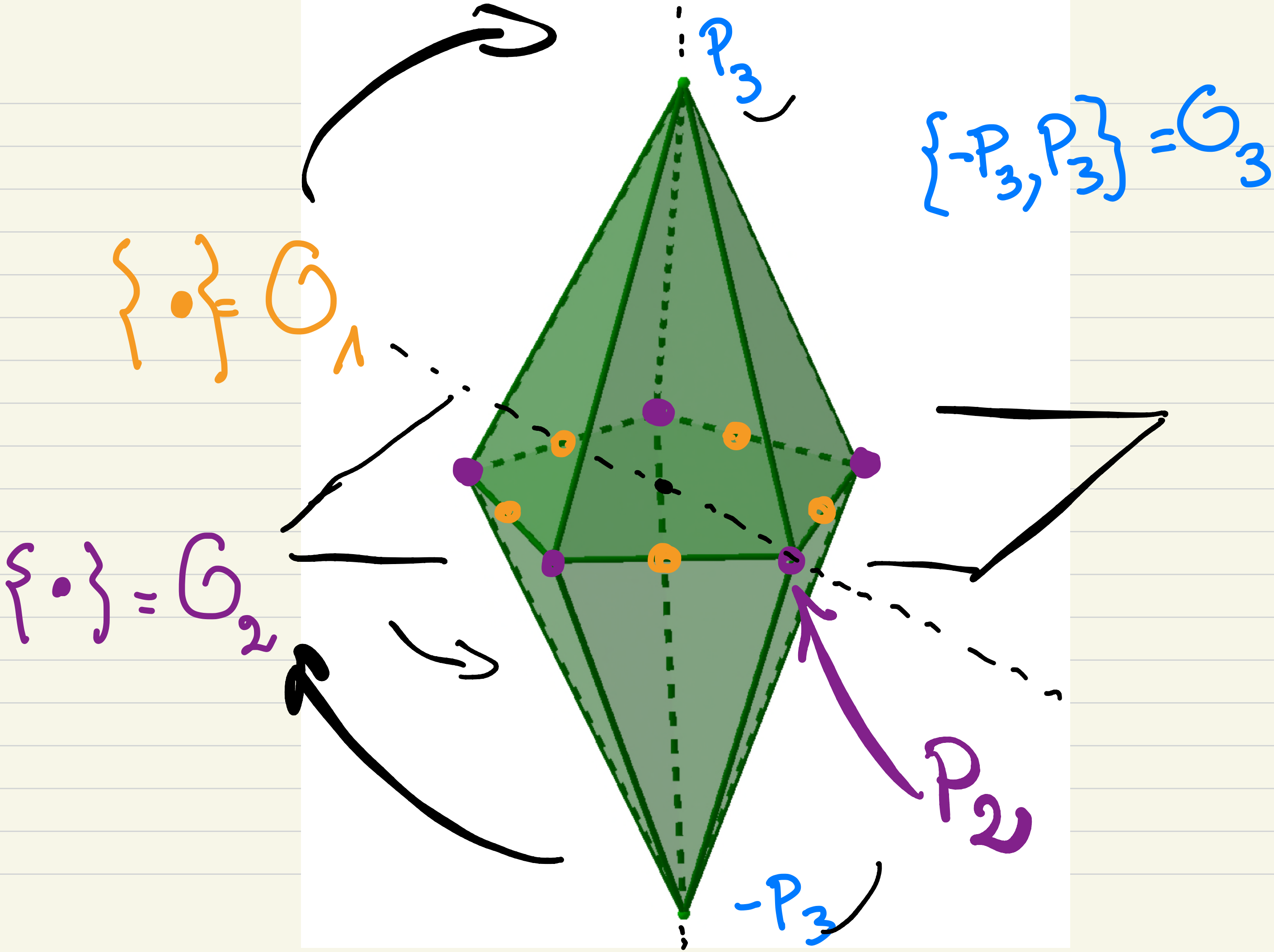
$n \geq 2$

Proposition 4.4. *Supposons qu'on soit dans le deuxieme cas*

$$o = 3,\ s_1 = 2, s_2 = 2, s_3 = n \geqslant 2,\ |G| = 2n,\ |X| = 2n + 2.$$

Alors $\mathcal{O}_3 = \{-P_3, P_3\}$ *et* G *est un groupe dihedral forme de* n *rotations autour de l'axe* $(-P_3, P_3)$ *et de* n *rotations d'angle* π *dont les axes, contenus dans le plan* $P_3^\perp$*, passent par les elements des orbites* $\mathcal{O}_1$ *et* $\mathcal{O}_2$*. L'orbite* $\mathcal{O}_2$ *(ainsi que l'orbite* $\mathcal{O}_1$*) forme un polygone regulier a* n *cotes (situe dans le plan* $P_3^\perp$*). Si* n *est impair on a* $\mathcal{O}_1 = -\mathcal{O}_2$ *et si* n *est pair* $\mathcal{O}_1 = -\mathcal{O}_1$*. Par ailleurs, l'orbite* $\mathcal{O}_1$ *est formee par les intersections de la sphere avec les axes passant par les milieux des cotes du polygone* $\mathcal{O}_2$ *et est obtenue a partir de celle-ci par une rotation d'angle* $k\frac{\pi}{n}$ *(rad) pour* k *impair.*

Preuve:



P_3
$\{-P_3, P_3\} = G_3$
$\{\bullet\} = G_1$
$\{\bullet\} = G_2$
P_2
$-P_3$

Preuve: Soit $O_3 = \{P_3, P_3'\}$

G_3 le stabilisateur de P_3

$|G_3| = n \geq 2$ $|G| = 2n$

$\Longrightarrow G_3 \triangleleft G$ (à faire plus tard)

$G_3' := \mathrm{Stab}_G(P_3')$ est conjugué de G_3

$= G_3$ $\Longrightarrow$ P_3' est sur l'axe (OP_3)

$\Rightarrow P_3' = -P_3$ G_3 est cyclique d'ordre n. $G_3 = r_3^{\mathbb{Z}}$ r_3 d'ordre n

Soit $P_1 \in \mathcal{O}_1$ $P_1 \neq P_3, -P^3$

Donc l'orbite $G_3.P_1 \subset G.P_1 = \mathcal{O}_1$

$G_3.P_1$ est dans un plan (affine) $\perp$ à l'axe $(P_3, -P_3)$.

et pareil pour $P_2 \in O_2$

$G_2 = \text{Stab de } P_2 = \{Id, r_2\}$

avec $r_2 \neq Id$ $\quad r_2^2 = Id$

r_2 ne fixe pas P_3 (car P_3 n'est pas sur l'axe de r_2)

$\Rightarrow r_2(P_3) = -P_3 \quad (r_2 P_3 \in O_3)$

$\Rightarrow P_2$ est dans le plan $(P_3 - P_3)^\perp$ passant par O

l'axe de r_2 est dans le plan $(P_3, -P_3)^{\perp}$ passant par O

On fait le même raisonnement pour tout pt de O_1 et O_2

$\Rightarrow$ $G_3 P_1 \subset O_1 \subset (P_3 - P_3')^{\perp}$ forment des polyg. rég. à n côtés.

$G_3 P_2 \subset O_2 \subset (P_3 - P_3')^{\perp}$

on peut également vérifier que

$\rightarrow r_3 \circ r_2 = r_2 \circ r_3^{-1}$ r_2 est d'ordre 2

r_2 est une rotation d'ordre 2 d'axe

$\perp$ à l'axe de r_3

$$r_2 \circ r_3 \circ r_2 \circ r_3 = Id$$

$$(r_2 \circ r_3)^2 = Id.$$

le groupe $\langle r_2, r_3 \rangle$ est diedral d'ordre $> n$ qui divise $2n$ $\Rightarrow = G$

$\square$

$r_2 \notin r_3^{\mathbb{Z}} \Rightarrow r_2 \circ r_3 \notin G_3$

en particulier $r_2 \circ r_3 \neq Id$

$r_2 \circ r_3 \in G$ donc à des poles

soit P_2' un de ces poles alors

$P_2' \notin \{P_3, -P_3\} \Rightarrow P_2' \in O_1 \cup O_2$

par le raisonnement precedent sont stab est d'ordre 2 $r_2 \circ r_3$ est d'ordre 2.

Proposition 4.2. *Le G-ensemble X n'a que deux ou trois orbites et les seules possibilites sont les suivantes:*

o	s_1	s_2	s_3	$\|G\|$	$\|\mathcal{O}_1\|$	$\|\mathcal{O}_2\|$	$\|\mathcal{O}_3\|$	$\|X\|$
2	n	n		n	1	1		2
3	2	2	n	$2n$	n	n	2	$2n+2$
3	2	3	3	12	6	4	4	14
3	2	3	4	24	12	8	6	26
3	2	3	5	60	30	20	12	62

PROPOSITION 4.5. *Supposons que l'on soit dans le troisieme cas*

$$s_1 = 2, s_2 = 3, s_3 = 3, |G| = 12, |X| = 14$$

alors les 4 points de la deuxieme et de la troisieme orbite $\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_3$ forment chacun un tetraedre regulier (4 sommets, 6 aretes, 4 faces) dont G est le groupe d'isometries; ces deux orbites sont images l'une de l'autre par la symetrie centrale par rapport a $\mathbf{0}$. Le groupe G est isomorphe au groupe alterne $\mathfrak{A}_4 \subset \mathfrak{S}_4$.

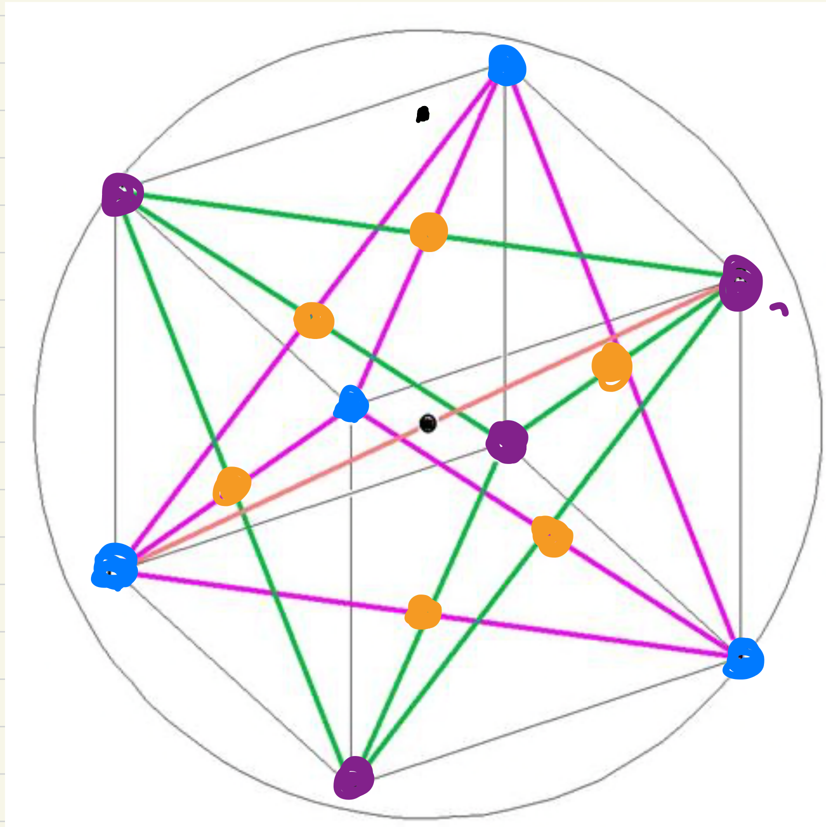
$\mathcal{O}_3 = -\mathcal{O}_2$

Preuve:

$\mathcal{O}_3 = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ $\quad G_1 = \mathrm{Stab}_G(P_1)$

G_1 est d'ordre 3 cyclique.

G_1 laisse $\mathcal{O}_3$ stable



$G_3 = \{ \bullet \}$

$G_2 = \{ \bullet \}$

$G_1 = \{ \bullet \}$

soit v_1 qui engendre G_1

$P_2 \neq -P_1$ en effet si $P_2 = -P_1$

P_1P_2 serait l'axe de v_1 et G_1

G_1 echangerait ou stabiliserai

P_3 et P_4. v_1 ne peut laisser

P_3 et P_4 invariant car sinon P_3 et P_4 seraient sur (P_1, P_2)

r_1 ne peut les échanger car on aurait un gpe d'ordre 3 agissant transitivement sur un ensemble d'ordre 2. impossible

$P_2 \notin (P_1, -P_1)$ $\quad G_1 . P_2$ est un triangle équilatéral $\perp (P_1, -P_1)$

$G_1 P_2 \in \{P_2, P_3, P_4\}$

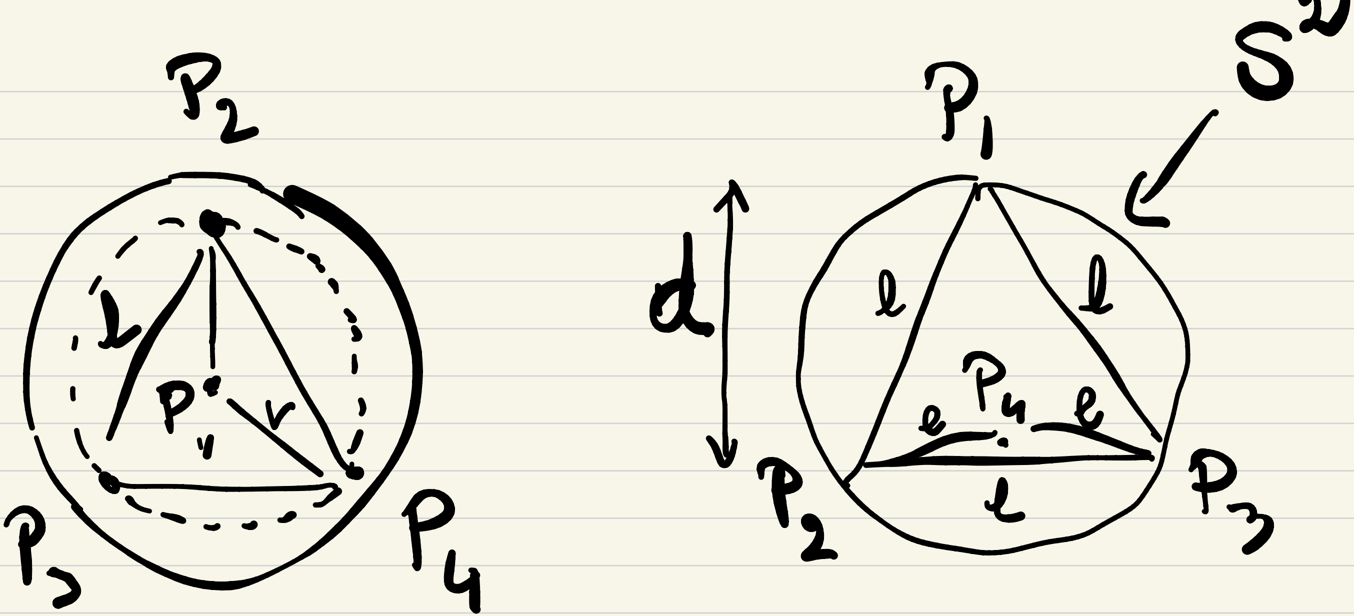
$\Rightarrow$ $P_2\, P_3\, P_4$ forme un triangle equilateral

$$\ell = |P_2P_3| = |P_2P_4| = |P_3P_4|$$

on repete le m argument pour P_2

$$|P_1P_3| = |P_1P_4| = |P_3P_4| = \ell$$

les 4 point $P_1\ P_2\ P_3\ P_4$ sont equidistants



$$\Rightarrow \quad d = 8/3 \qquad l = 2\sqrt{\frac{2}{3}} \qquad r = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

le Groupe G agit sur O_3 et permute ses elements : on a un morphisme $G \longrightarrow \mathfrak{S}(O_3)$

$$r \longrightarrow \sigma_r : P_i \to r(P_i) = P_{\sigma(i)}$$

Comme $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ ne sont pas coplanaire ce morphisme est injectif

: si une rotation laisse fixe 4 pts non-coplanaire c'est l'identité.

On a $G \hookrightarrow \mathfrak{S}(C_3) = \mathfrak{S}_4$

G est d'ordre 12 donc l'image de G est un sous groupe d'indice 2 de $\mathfrak{S}_4$ $\Rightarrow G \simeq \mathfrak{A}_4$ $\square$

Proposition 4.2. *Le G-ensemble X n'a que deux ou trois orbites et les seules possibilites sont les suivantes:*

o	s_1	s_2	s_3	$\lvert G\rvert$	$\lvert\mathcal{O}_1\rvert$	$\lvert\mathcal{O}_2\rvert$	$\lvert\mathcal{O}_3\rvert$	$\lvert X\rvert$
2	n	n		n	1	1		2
3	2	2	n	$2n$	n	n	2	$2n+2$
3	2	3	3	12	6	4	4	14
3	2	3	4	24	12	8	6	26
3	2	3	5	60	30	20	12	62

Proposition 4.6. *Supposons que l'on soit dans le quatrieme cas*

$$s_1 = 2, s_2 = 3, s_3 = 4, |G| = 24, |X| = 26$$

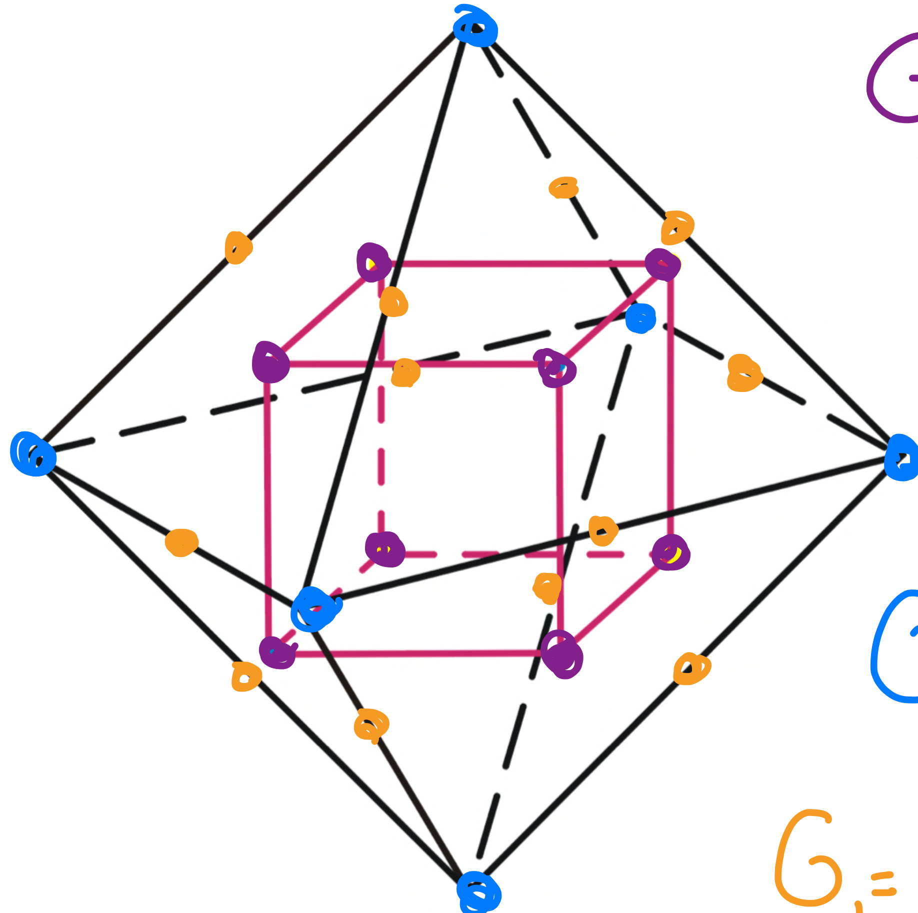
alors les 6 points de la troisieme orbite $\mathcal{O}_3$ *forment un octaedre regulier et les 8 points de la seconde* $\mathcal{O}_2$ *forment un cube et* G *est le groupe d'isometries de ces deux polytopes reguliers et est isomorphe au groupe symetrique* $\mathfrak{S}_4$*. On a*

$$\mathcal{O}_2 = -\mathcal{O}_2,\ \mathcal{O}_3 = -\mathcal{O}_3.$$

La premiere orbite $\mathcal{O}_1$ *d'ordre 12 verifie*

$$\mathcal{O}_1 = -\mathcal{O}_1$$

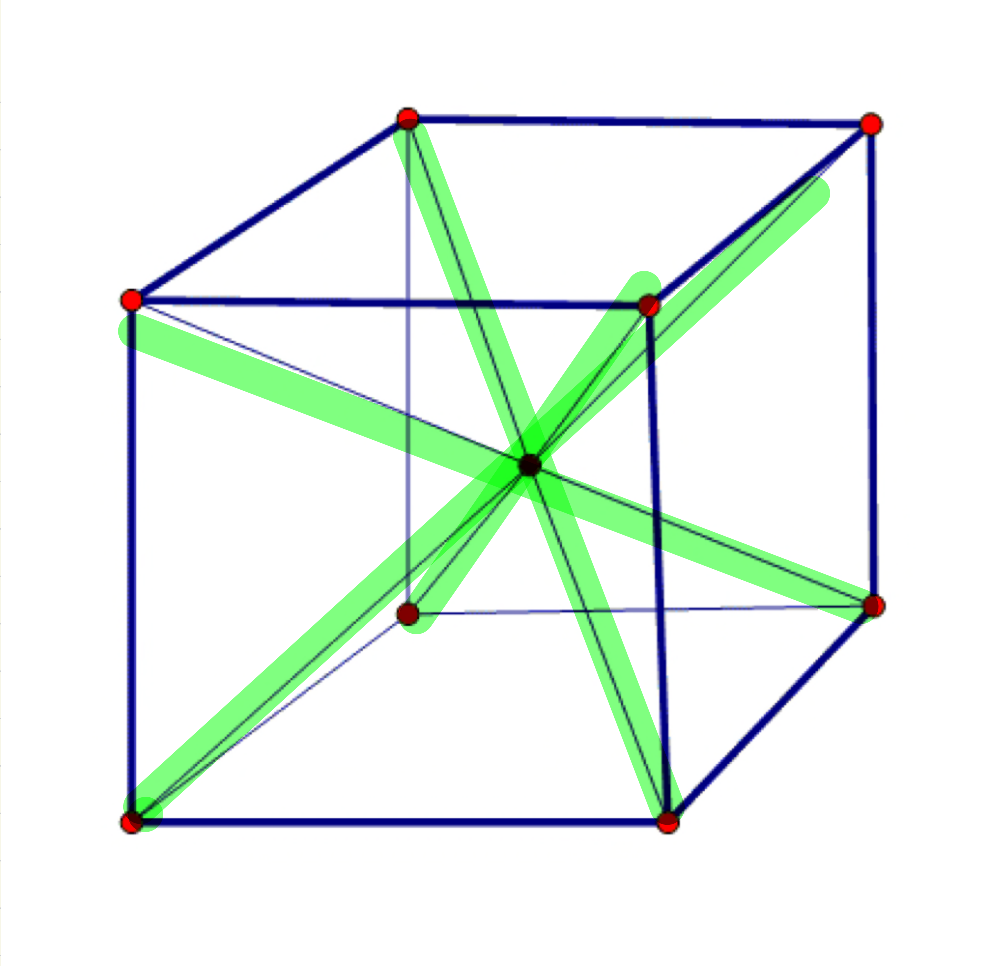
et est formee des intersections de la sphere avec les droites passant par les milieux des 12 aretes du cube (ou des 12 aretes de l'octahedre) et le milieu oppose. Le stabilisateur d'un de ces elements est engendre par la rotation d'angle π *et d'axe le point et son oppose.*



$G_2 = \{\bullet\}$

$G_3 = \{\bullet\}$

$G_1 = \{\bullet\}$



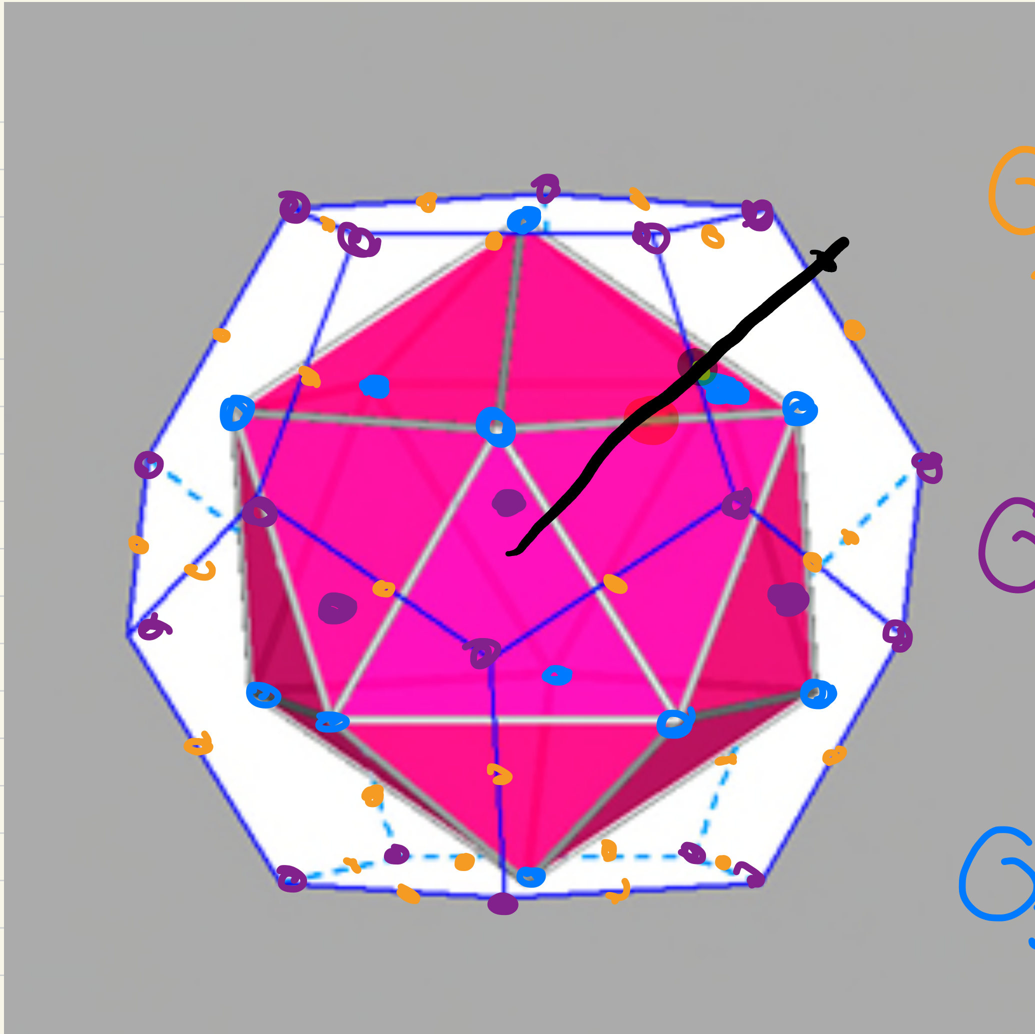
Proposition 4.2. *Le G-ensemble X n'a que deux ou trois orbites et les seules possibilites sont les suivantes:*

o	s_1	s_2	s_3	$\lvert G\rvert$	$\lvert\mathcal{O}_1\rvert$	$\lvert\mathcal{O}_2\rvert$	$\lvert\mathcal{O}_3\rvert$	$\lvert X\rvert$
2	n	n		n	1	1		2
3	2	2	n	$2n$	n	n	2	$2n+2$
3	2	3	3	12	6	4	4	14
3	2	3	4	24	12	8	6	26
3	2	3	5	60	30	20	12	62

Proposition 4.7. *Supposons que l'on soit dans le dernier cas*

$$s_1 = 2, s_2 = 3, s_3 = 5, |G| = 60, |X| = 62$$

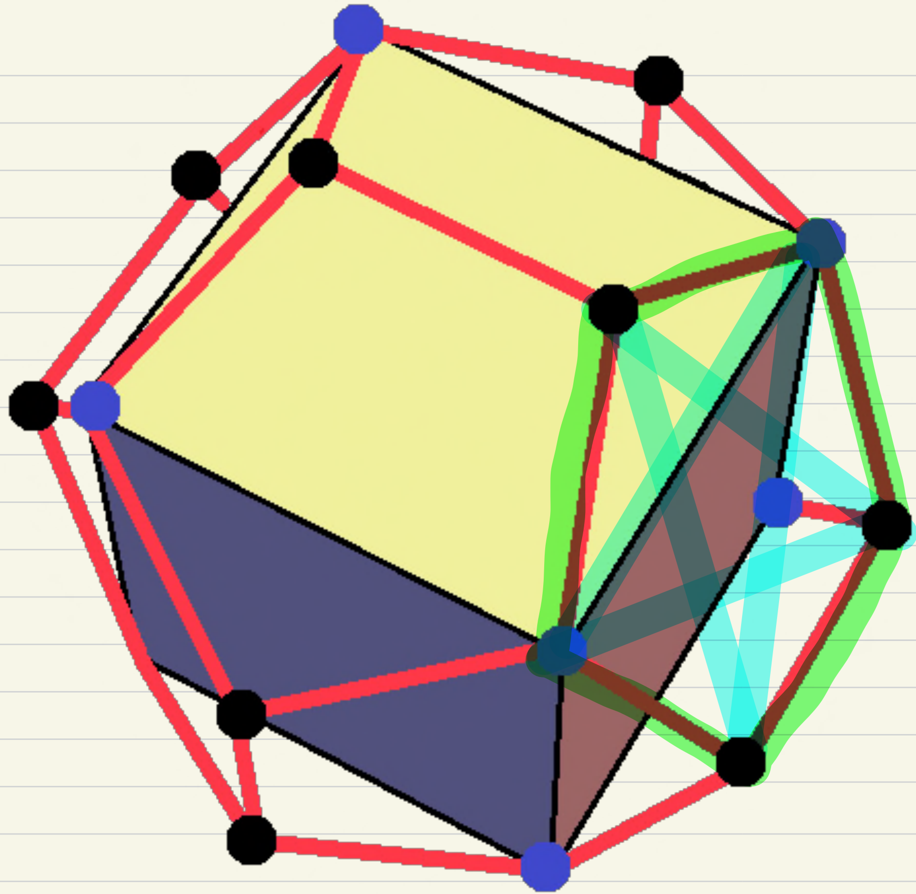
alors les 12 *points de la troisieme orbite forment un icosaedre regulier (possedant* 20 *faces et* 30 *aretes) et les* 20 *points de la seconde forment un dodecaedre regulier (possedant* 12 *faces et* 30 *aretes) et les centres de chacune des 20 faces de cet icosaedre est aligne avec un des 12 sommets du dodecaedre (et vice-versa pour les centres des 12 faces du dodecaedre). Les 30 points de la premiere orbite sont alignes avec les milieux des aretes de chacun de ces deux polytopes. Le groupe G est le groupe d'isometries de ces deux polytopes reguliers et est isomorphe au groupe alterne $\mathfrak{A}_5$.*

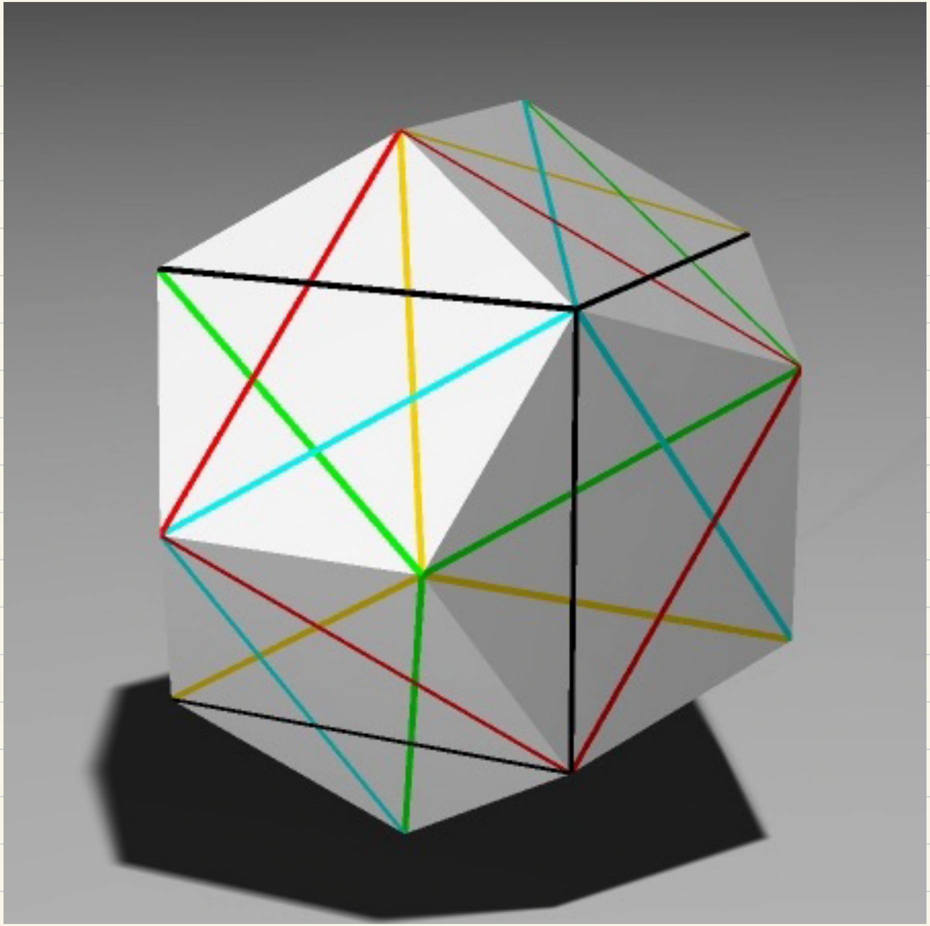


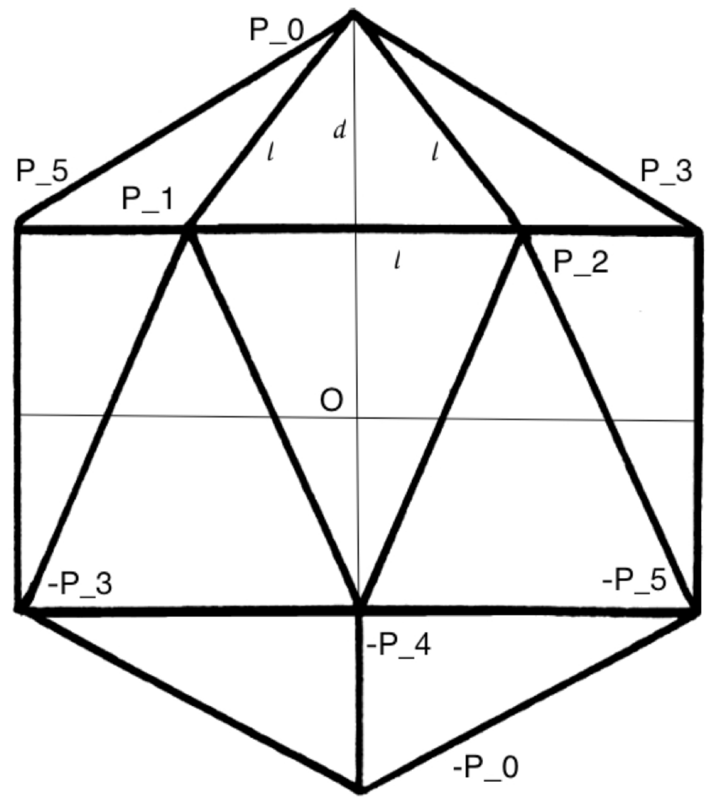
$G_1 = \{\bullet\}$

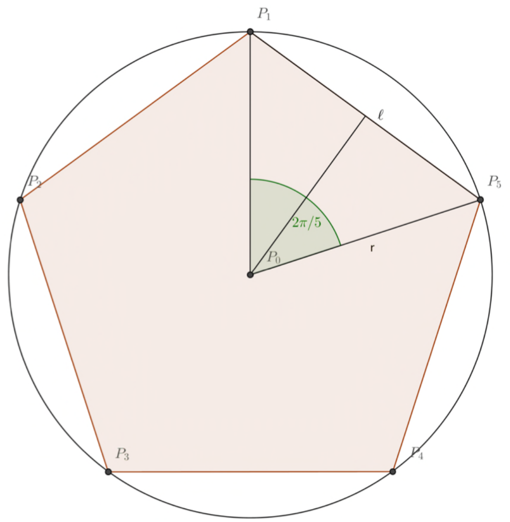
$G_2 = \{\bullet\}$

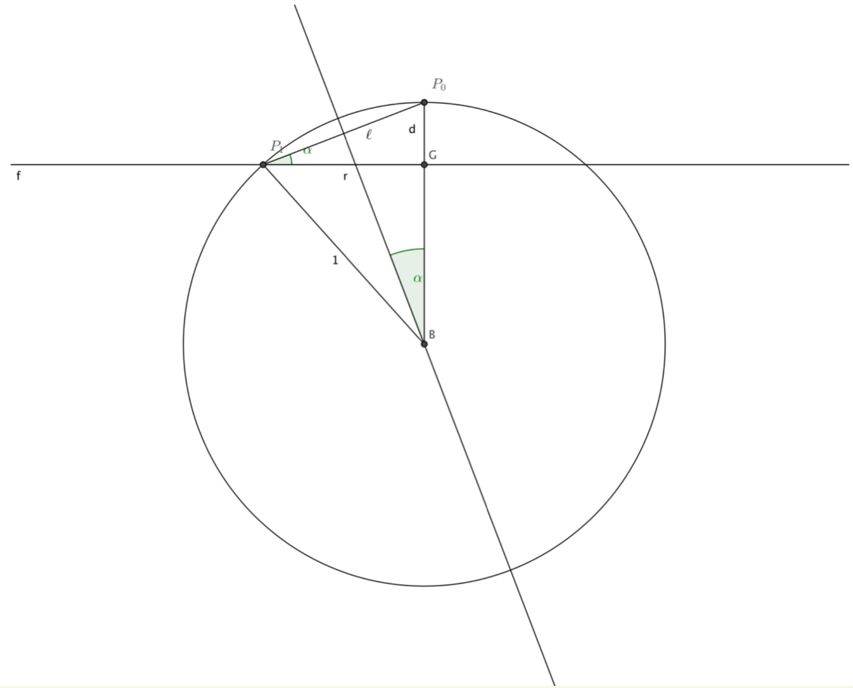
$G_3 = \{\bullet\}$






P_0
d
l
l
P_5
P_1
P_3
l
P_2
O
-P_3
-P_5
-P_4
-P_0


P_1
P_2
P_3
P_4
P_5
ℓ
$2\pi/5$
P_0
r


P_0
d
ℓ
P_1
α
G
f
r
1
α
B

4.4. Le tetraedre regulier.

(1) Il possede 4 faces (triangulaires), 6 aretes, 4 sommets.
(2) Son groupe de rotations est d'ordre 12, est isomorphe au groupe alterne $\mathfrak{A}_4$ et est constitue de
   - L'identite.
   - 2×4 rotations d'ordre 3 d'axe passant par un sommet et le centre de la face opposee.
   - 1×3 rotations d'ordre 2 d'axe passant par les milieu d'une paire d'aretes opposees.
(3) Son groupe d'isometries complet (speciales et non-speciales) est isomorphe au groupe symetrique $\mathfrak{S}_4$.
(4) Le polytope dual du tetraedre regulier est un tetraedre regulier.
(5) Les points de coordonnees

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),\ \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1),\ \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,-1),\ \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,-1,1)$$

forment les sommet d'un tetraedre regulier centre a l'origine et inscrit dans la sphere unite (en fait le tetraedre est inscrit dans un cube –cf. ci-dessous–).

4.6. L' octaedre regulier.

(1) Il possede 8 faces (triangulaires), 12 aretes, 6 sommets. Les barycentres des six faces est l'ensemble des sommets d'un cube inscrit.

(2) Son groupe de rotations est d'ordre 24, est isomorphe au groupe symetrique $\mathfrak{S}_4$ et est constitue des memes rotations que le cube inscrit
- L'identite.
- 2×4 rotations d'ordre 3 d'axe passant par les centres des 4 paires de faces opposees.
- 2×3 rotations d'ordre 4 d'axe passant par les 3 paires de sommets opposes.
- 1×3 rotations d'ordre 2 d'axe passant par les 3 paires de sommets opposes.
- 1×6 rotations d'ordre 2 d'axe passant par les milieux des 6 paires d'aretes opposees.

(3) Le polytope dual de l'octaedre regulier est un hexaedre regulier.

(4) Son groupe d'isometries complet (speciales et non-speciales) est isomorphe au groupe produit $\mathfrak{S}_4 \times \{\pm 1\}$.

(5) Les points de coordonnees

$$(\pm 1, 0, 0),\ (0, \pm 1, 0),\ (0, 0, \pm 1)$$

sont les sommets d'un octaedre regulier centre a l'origine et inscrit dans la sphere unite.

4.7. Le dodecaedre regulier.

(1) Il possede 12 faces (pentagonales), 30 aretes, 20 sommets. L'ensemble des centres des 12 faces est l'ensemble des sommets d'un icosaedre regulier inscrit dans le dodecaedre.
(2) Son groupe de rotations est d'ordre 60, est isomorphe au groupe alterne $\mathfrak{A}_5$ et est constitue de
   - L'identite.
   - 4×6 rotations d'ordre 5 d'axe passant par les centres des 6 paires de faces opposees.
   - 2×10 rotations d'ordre 3 d'axe passant par les 10 paires de sommets opposes.
   - 1×15 rotations d'ordre 2 d'axe passant par les milieux des 15 paires d'aretes opposees.
(3) Le polytope dual du dodecaedre regulier est un icosaedre regulier.
(4) Son groupe d'isometries complet (speciales et non-speciales) est isomorphe au groupe produit $\mathfrak{A}_5 \times \{\pm 1\}$.
(5) Soit

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

les points de coordonnees

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(\pm 1, \pm 1, \pm 1),$$

$$(0, \pm(1+\varphi^{-1}), \pm(1-\varphi^{-2})),\ (0, \pm(1+\varphi^{-1}), \pm(1-\varphi^{-2})),\ (0, \pm(1+\varphi^{-1}), \pm(1-\varphi^{-2}))$$

est l'ensemble des sommets d'un dodecaedre regulier centre a l'origine et inscrit dans la sphere unite.

4.8. L' icosaedre regulier.

(1) Il possede 20 faces (triangulaires), 30 aretes, 12 sommets. L'ensemble des centres des 20 faces est l'ensemble des sommets d'un dodecaedre regulier inscrit dans l'icosaedre.

(2) Son groupe de rotations est d'ordre 60 est isomorphe au groupe alterne $\mathfrak{A}_5$ et est constitue des meme rotation que pour le dodecaedre:
   - L'identite.
   - 4×6 rotations d'ordre 5 d'axe passant par les 6 paires de sommets opposee.
   - 2×10 rotations d'ordre 3 d'axe passant par les centres des 10 paires de faces opposees.
   - 1×15 rotations d'ordre 2 d'axe passant par les milieux des 15 paires d'aretes opposees.

(3) Le polytope dual du icosaedre regulier est un dodecaedre regulier.

(4) Son groupe d'isometries complet (speciales et non-speciales) est isomorphe au groupe produit $\mathfrak{A}_5 \times \{\pm 1\}$.

(5) Pour $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ les points de coordonnees

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}}(0, \pm 1, \pm\varphi), \ \ \frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}}(\pm 1, \pm\varphi, 0), \ \ \frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}}(\pm\varphi, 0, \pm 1)$$

est l'ensemble des sommets d'un icosaedre regulier centre a l'origine.

Soit $G^+ = \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)_P^+$ et $G = \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)_P$

alors G^+ est d'indice 2 ds G et on

a

$\mathbf{P}$	$\widehat{\mathbf{P}}$	$\lvert S\rvert$	$\lvert A\rvert$	$\lvert F\rvert$	χ	G^+	G
Tetraedre	*Tetraedre*	4	6	4	2	$\mathfrak{A}_4$	$\mathfrak{S}_4$
Hexaedre	*Octaedre*	8	12	6	2	$\mathfrak{S}_4$	$\mathfrak{S}_4 \times \{\pm 1\}$
Octaedre	*Hexaedre*	6	12	8	2	$\mathfrak{S}_4$	$\mathfrak{S}_4 \times \{\pm 1\}$
Dodecaedre	*Icosaedre*	20	30	12	2	$\mathfrak{A}_5$	$\mathfrak{A}_5 \times \{\pm 1\}$
Icosaedre	*Dodecaedre*	12	30	20	2	$\mathfrak{A}_5$	$\mathfrak{A}_5 \times \{\pm 1\}$

Le groupe alterné

Théorème 4.10. *Soit $n \geqslant 2$ le groupe symetrique $\mathfrak{S}_n$ admet un unique morphisme de groupes non-trivial a valeur dans $\{\pm 1\}$: on l'appelle "signature" et on la note*

$$\operatorname{sign} : \begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_n & \mapsto & \{\pm 1\} \\ \sigma & \mapsto & \operatorname{sign}(\sigma) \end{array}.$$

Son noyau s'appelle groupe alterne et est note $\mathfrak{A}_n$. C'est l'unique sous-groupe d'indice 2 de $\mathfrak{S}_n$.

Preuve : Definition de sign :

$\mathfrak{S}_n$ est engendre par les transposition

$i \neq j$ $\quad \tau_{ij} = (i\ j)$

$$\begin{array}{l} i \to j \\ j \to i \\ k \to k \quad k \neq i, j \end{array}$$

une permutation s'écrit comme produit de transpositions

$$\mathrm{sign}(\sigma) = (-1)^{\text{parité du nb de transposition dans cette écriture}}$$

- Soit $s : \mathfrak{S}_n \to \{\pm 1\}$ non trivial

Comme $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les transp il existe au moins une transp τ tq $s(\tau) = -1$

- toutes les transp sont conjuguées

$\forall \tau, \tau'$ transp $\exists\, \sigma \in \mathfrak{S}_n$ tq

$$\tau' = \sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}$$

$$\begin{aligned} s(\tau') &= s(\sigma) \times s(\tau) \times s(\sigma)^{-1} \in \{\pm 1\} \\ &= s(\sigma) \times s(\sigma)^{-1} \times s(\tau) \\ &= s(\tau) = -1 \implies s = \text{sign} \end{aligned}$$

Lemme 4.2. *Soit G un groupe et H un sous-groupe d'indice 2 alors H est distingue dans G et H est le noyau d'un morphisme de groupes nontrivial $G \mapsto \{\pm 1\}$.*

Si on admet ce lemme et qu'on l'applique à $\mathfrak{S}_n$: soit $H \subset \mathfrak{S}_n$ d'indice 2 alors

$H \lhd \mathfrak{S}_n$ et $H = \ker(s) = \ker(\mathrm{sign})$

$s : \mathfrak{S}_n \to \{\pm 1\}$ $H = \mathfrak{A}_n$ $\square$

Preuve du Lemme : Si H est d'indice 2 ds G soit $g \in G - H$

alors $G = H \sqcup g.H$

pour mq $H \lhd G$ il suffit de

mq $gHg^{-1} \subset H$

soit $h \in gHg^{-1}$ $h = gh'g^{-1}$, $gh' \in gH$

$\Rightarrow$ comme $g^{-1} \notin H \Rightarrow$

$$g h' g^{-1} \notin gH$$

$$g h'^{-1} g^{-1} \in H \qquad g H g^{-1} \in H$$

donc $H \lhd G$

$$H = \ker\left(G \longrightarrow G/_H\right)$$

G/H est un gpe d'ordre 2

donc isomorphe à $\{\pm 1\}$

et le morphisme

$G \to G/H$ est non trivial

car l'image de $g \rightsquigarrow gH \in G/H$

$\neq H = e_{G/H}$

4.1. Polytopes.

DÉFINITION 4.3. *Un demi-espace (affine) ferme* $\mathrm{d}\mathbf{E} \subset \mathbb{R}^{\times}$ *est l'ensemble des points de satisfaisant la condition suivante*

$$\mathrm{d}\mathbf{E} = \mathrm{d}\mathbf{E}_{\vec{w},h} = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^{\times},\ \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \leqslant h\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^{\times},\ ax + by + cz - h \leqslant 0\}$$

avec $\vec{w} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^{\times}$, $h \in \mathbb{R}$. *C'est un ferme non-borne de* $\mathbb{R}^3$ *dont la frontiere est le plan affine d'equation*

$$\mathrm{P}_{\vec{w},h} : ax + by + cz = h.$$

DÉFINITION 4.4. *Un polytope* $\mathbf{P} \subset \mathbb{R}^3$ *est un sous-ensemble compact d'interieur non-vide obtenu comme intersection d'un ensemble fini de demi-espaces fermes de* $\mathbb{R}^3$*:*

$$\mathbf{P} = \bigcap_{i=1}^{t} \mathrm{d}\mathbf{E}_i$$

avec

$$\mathrm{d}\mathbf{E}_i = \{P \in \mathbb{R}^{\times},\ \langle P, \vec{w}_i \rangle - h_i \leqslant 0\}$$

avec $\vec{w}_i \in \mathbb{R}^{\times}$ *et* $h_i \in \mathbb{R}$.

Définition 4.5. *Un ensemble* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *est convexe si et seulement si*

$$\forall P, P' \in E, \ \textit{le segment } [P, P'] \textit{ est contenu dans } \Omega.$$

Faces, Arêtes, Sommets

Théorème 4.5. *Soit un polytope de la forme*

$$\mathbf{P} = \bigcap_{i=1}^{f} \mathrm{d}\mathbf{E}_i.$$

Supposons que dans l'ecriture precedente le nombre f de demi-espaces dont $\mathbf{P}$ est l'intersection, est minimal.

(1) *les demi-espaces*

$$\{\mathrm{d}\mathbf{E}_i,\ i = 1, \cdots, f\}$$

et les plans associes $\{\mathrm{P}_i,\ i = 1, \cdots, f\}$ sont uniquement definis par $\mathbf{P}$.

(2) *Pour chaque $i = 1, \cdots, f$, l'intersection $\mathbf{F}_i = \mathrm{P}_i \cap \mathbf{P}$ est un polygone compact convexe d'interieur non-vide et est contenu dans la frontiere $\partial\mathbf{P} = \mathbf{P} - \mathbf{P}^\circ$. On l'appelle la i-eme face de $\mathbf{P}$.*

(3) *La frontiere est la reunion des faces de $\mathbf{P}$*

$$\partial\mathbf{P} = \bigcup_{i=1}^{f} \mathbf{F}_i.$$

Preuve :

Arètes et Sommets

Théorème 4.6. *Chaque face* $\mathrm{F}_i \in \mathrm{F}(\mathbf{P})$, *est un polygone convexe compact d'interieur non-vide contenu dans le plan* $\mathrm{P}_i : l_i(P) = 0$. *L'interieur est donne par*

$$\mathbf{F}_i^\circ = \{P \in \mathbb{R}^3,\ l_i(P) = 0,\ \forall j \neq i,\ l_j(P) < 0\}.$$

Soit $I(\mathbf{F}_i) \subset \{1, \cdots, f\} - \{i\}$ *un ensemble d'indices de taille minimal, tel que* $\mathbf{F}_i$ *est definie par les conditions*

$$\mathbf{F}_i = \{P \in \mathbf{P},\ l_i(P) = 0,\ \forall j \in I(\mathbf{F}_i)\ l_j(P) \leqslant 0,\ \}$$

alors $I(\mathbf{F}_i)$ *est unique et la frontiere de* $\mathbf{F}_i$ *est constituee d'une reunion finie de segments d'interieurs non-vides*

$$\partial \mathbf{F}_i = \bigcup_{j \in I(\mathbf{F}_i)} \mathbf{A}_{i,j}$$

donnes par

$$\mathbf{A}_{i,j} = \mathbf{F}_i \cap \mathrm{P}_j = \{P \in \mathbb{R}^3,\ l_i(P) = l_j(P) = 0,\ \forall j' \in I(\mathbf{F}_i) - \{j\}\ l_{j'}(P) \leqslant 0\}.$$

Ses segments sont appeles aretes de $\mathbf{F}_i$ *et l' ensemble de ces aretes est note* $A(\mathbf{F}_i)$. *Pour chaque arete, il existe exactement deux* $k, l \in I(\mathbf{F}_i) - \{j\}$ *distincts tels que les deux extremites de* $\mathbf{A}_{i,j}$ P_k, P_l, *appeles sommets, sont definies par*

$$l_i(P_k) = l_j(P_k) = l_k(P_k) = 0,\ l_i(P_l) = l_j(P_l) = l_l(P_l) = 0$$

$$\mathrm{F}(\mathbf{P}) = \{\mathbf{F}_i,\ i = 1, \cdots, f\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$$

$$A(\mathbf{P}) = \{\mathbf{A}_{i,j},\ i = 1, \cdots, f,\ j \in I(\mathbf{F}_i)\} \subset \text{Segments de } \mathbb{R}^3$$

$$S(\mathbf{P}) = \{P_{k,l} \text{ sommets de l'arete } \mathbf{A}_{i,j},\ i = 1. \cdots, f,\ j \in I(\mathbf{F}_i)\} \subset \text{Points de } \mathbb{R}^3.$$

DÉFINITION 4.7. *Soit* $s(\mathbf{P}), a(\mathbf{P}), f(\mathbf{P})$ *le nombre de sommets, d'aretes et de faces de* $\mathbf{P}$. *La caracteristique d'Euler de* $\mathbf{P}$ *est la somme alternee*

$$\chi(\mathbf{P}) = s(\mathbf{P}) - a(\mathbf{P}) + f(\mathbf{P}).$$

THÉORÈME 4.7 (Euler). *On a*

$$\chi(\mathbf{P}) = 2.$$

Relations d'incidence/adjacence

PROPOSITION 4.9. *Deux aretes distinctes ne s'intersectent que si elle appartiennent a une meme face; leur intersection est un sommet commun. Deux faces distinctes s'intersectent soit en un sommet, soit le long d'une arete commune. Dans ce dernier cas on dit que les faces sont adjacentes.*

Dualité

DÉFINITION 4.9. *Soit* $\mathbf{P}$ *un polytope. On suppose que* $\mathbf{0} \in \mathbf{P}^\circ$. *Le dual de* $\mathbf{P}$ *est l'ensemble des points de* $\mathbb{R}^3$ *defini par*

$$\widehat{\mathbf{P}} = \{Q \in \mathbb{R}^3,\ \forall P \in \mathbf{P},\ \langle P, Q\rangle \leqslant 1\}.$$

THÉORÈME 4.8. *Le dual d'un polytope tel que* $\mathbf{0} \in \mathbf{P}^\circ$ *est un polytope d'interieur non-vide tel que* $\mathbf{0} \in \widehat{\mathbf{P}}^\circ$ *et defini comme l'intersection de* $s(\mathbf{P})$ *demi-espaces*

$$\widehat{\mathbf{P}} = \{Q \in \mathbb{R}^3,\ \forall P \in S(\mathbf{P}),\ \langle P, Q\rangle - 1 \leqslant 0\}.$$

Les ensembles suivants sont en bijection

- $S(\mathbf{P})$ *et* $F(\widehat{\mathbf{P}})$.
- $F(\mathbf{P})$ *et* $S(\widehat{\mathbf{P}})$.
- $A(\mathbf{P})$ *et* $A(\widehat{\mathbf{P}})$.

De plus ces bijections renversent les relations d'inclusion.

et preservent les relations d'adjacence

4.3. Polytopes reguliers/ Solides platoniciens.

DÉFINITION 4.10. *soit* $\mathbf{P}$ *un polytope; un drapeau de* $\mathbf{P}$ *est la donnee d'un triplet*

$$D = (\mathbf{S}, \mathbf{A}, \mathbf{F}) \in S(\mathbf{P}) \times A(\mathbf{P}) \times F(\mathbf{P})$$

tel que

$$\mathbf{S} \subset \mathbf{A} \subset \mathbf{F} \subset \mathbf{P}.$$

On note $D(\mathbf{P})$ *l'ensemble des drapeaux de* $\mathbf{P}$

DÉFINITION 4.11. *Un polytope est regulier si son groupe d'isometries agit transitivement sur l'espace des drapeaux* $D(\mathbf{P})$*. Un polytope regulier est appelle solide platonicien.*

THÉORÈME 4.9. *A isometrie et homothetie pres, les seuls polytopes reguliers sont le tetraedre (regulier), l'hexaedre (regulier) encore appelle "cube", l'octaedre regulier et l'icosaedre (regulier)*