Solution de l'exercice 1. 1. Soit $r \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)^+_{\mathbf{0}}$ une rotation linéaire. On va montrer que r peut s'écrire comme le produit de deux symétries linéaires.

Soit $s \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)^-_{\mathbf{0}}$ uns symétrie linéaire quelconque. Alors $s \circ r$ est une symétrie linéaire. Donc on peut écrire $r = s \circ (s \circ r)$ où s et $s \circ r$ sont des symétries linéaires.

2. Soit r une rotation linéaire de $\mathbb{R}^3$. Par un résultat du cours, il existe une BON $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle r est représentée par une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$$

où $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est la matrice de $r|_{\mathbf{e}_1^\perp}$ dans la BON $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, qui est une rotation linéaire du plan $\mathbf{e}_1^\perp = \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle \cong \mathbb{R}^2$. Vu le point (1) ci-dessus, on peut écrire $r|_{\mathbf{e}_1^\perp} = s_1 \circ s_2$ où s_1, s_2 sont des symétries linéaires de $\mathbf{e}_1^\perp$. Ainsi, $r = (\mathrm{id}_{\langle \mathbf{e}_1 \rangle} \oplus s_1) \circ (\mathrm{id}_{\langle \mathbf{e}_1 \rangle} \oplus s_2)$ où $\mathrm{id}_{\langle \mathbf{e}_1 \rangle} \oplus s_i$ est l'isométrie linéaire de $\mathbb{R}^3$ fixant $\langle \mathbf{e}_1 \rangle$ et agissant sur $\mathbf{e}_1^\perp = \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$ selon s_i, $i = 1, 2$. L'isométrie linéaire $id_{\langle \mathbf{e}_1 \rangle} \oplus s_1$ est bien une symétrie par rapport à un plan car elle a deux vecteurs propres orthogonaux de valeur propre 1 ($\mathbf{e}_1$ et un vecteur du plan $\mathbf{e}_1^\perp$ qui est fixé par s_1) et un vecteur propre de valeur propre -1 (dans $\mathbf{e}_1^\perp$). Idem pour $id_{\langle \mathbf{e}_1 \rangle} \oplus s_2$.

3. Soit φ une isométrie linéaire non-spéciale de $\mathbb{R}^3$. Alors $\det(\varphi) = -1$. Soit s une symétrie linéaire par rapport à un plan quelconque. Alors $\varphi = s \circ s \circ \varphi$ où $s \circ \varphi$ est une isométrie linéaire spéciale (son déterminant vaut 1), donc une rotation. Vu (2) ci-dessus, $s \circ \varphi$ est la composée de deux symétries linéaires par rapport à des plans. On obtient donc que $\varphi = s \circ s \circ \varphi$ peut s'écrire comme la composée de trois symétries linéaires par rapport à des plans.

4. Soit t_u une translation de $\mathbb{R}^3$, avec $u \in \mathbb{R}^3$. On considère la symétrie par rapport au plan $u^\perp$ (voir exercice 10 de la série 9)

$$s_1 = \mathrm{sym}_u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : v \longmapsto v - 2\frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} u$$

et la symétrie

$$s_2 = t_u \circ s_1 = t_u \circ \mathrm{sym}_u,$$

qui est une symétrie affine par rapport à un plan (le translaté du plan $u^\perp$ selon $u/2$) car le vecteur u de sa partie translation est perpendiculaire au plan fixe de sym_u.

Comme $s_1^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$, la translation t_u peut s'écrire comme la composée de deux symétries par rapport à des plans

$$t_u = t_u \circ s_1^2 = s_2 \circ s_1.$$

Cet argument est également valable pour le cas général de translations et symétries hyperplanes de $\mathbb{R}^n$.

Solution de l'exercice 2. 1. On a

$$\bar{\lambda}.\bar{v} = \overline{l.v} = \overline{M.v} = \overline{M}.\bar{v} = M.\bar{v}$$

où la dernière égalité vient du fait que M est une matrice réelle. On a donc montré que $\bar{v}$ est vecteur propre de M de valeur propre $\bar{\lambda}$.

2. Les vecteurs x et y sont non-nuls, car sinon v serait purement réel, ce qui n'est pas le cas par hypothèse, ou purement imaginaire, auquel cas $iv \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda.iv = M.iv \in \mathbb{R}^n$, ce qui est absurde.

Ils sont linéairement indépendants : si $a, b \in \mathbb{R}$ sont tels que $0 = ax + by = (a - ib)v + (a + ib)\bar{v}$, alors $a - ib = a + ib = 0$ (car v et $\bar{v}$ sont des vecteurs propres de valeurs propres distinctes, donc linéairement indépendants), donc $a = b = 0$.

Montrons maintenant que $\langle x, y\rangle$ est stable sous l'action de φ. On a

$$\begin{aligned}\varphi(x) = M.x &= \frac{1}{2}(M.v + M.\bar{v}) = \frac{1}{2}(\lambda v + \bar{\lambda} y)\\ &= \frac{1}{2}\left((\Re\lambda + i\Im(\lambda))(x + iy) + (\Re\lambda - i\Im(\lambda))(x - iy)\right) = \Re(\lambda)x - \Im(\lambda)y\end{aligned}$$

donc $\varphi(x)$ appartient à $\langle x, y\rangle$. Le calcul est similaire pour y. Cela montre que $\langle x, y\rangle$ est stable sous l'action de φ.

3. Soit $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ une BON du sous-espace $\langle x, y\rangle$. On la complète (par Gram-Schmidt par exemple) en une BON $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$. Les sous-espaces $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\rangle$ et $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\rangle^\perp = \langle \mathbf{e}_3, \dots, \mathbf{e}_n\rangle$ sont supplémentaires orthogonaux, et chacun d'eux est stable sous l'action de φ. Dès lors, les composantes de $\varphi(\mathbf{e}_i)$ selon $\mathbf{e}_j$ sont nulles pour $i < 3 \le j$ et $j < 3 \le i$, ce qui montre que la matrice de φ dans cette BON a bien la forme

$$\begin{pmatrix} M_2 & 0 \\ 0 & M_{n-2}\end{pmatrix}$$

où M_2 est la matrice de la restriction $\varphi|_{\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\rangle}$ dans la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ et M_{n-2} est la matrice de la restriction $\varphi|_{\langle \mathbf{e}_3, \dots, \mathbf{e}_n\rangle}$ dans la base $(\mathbf{e}_3, \dots, \mathbf{e}_n)$. Ces bases sont des BON et la restriction d'une isométrie est une isométrie. Dès lors, les matrices M_2 et M_{n-2} sont des matrices orthogonales.

La restriction $\varphi|_{\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\rangle}$ de φ au plan $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\rangle$ est une isométrie de ce plan sans valeur propre réelle (car elle a deux valeurs propres complexes distinctes : λ et $\bar{\lambda}$). C'est donc une rotation de ce plan, i.e., $\det(M_2) = 1$ et ainsi $\det(M) = \det(M_2)\det(M_{n-2}) = \det(M_{n-2})$.

4. Soient r et r' les dimensions des sous-espaces propres E_1 et E_{-1} associés à 1 et -1, respectivement. Alors dans une BON $B = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ dont les r premiers vecteurs forment une BON de E_1 et dont les r' suivant vecteurs forment une BON de E_{-1}, l'isométrie φ est représentée par une matrice de la forme

$$M = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_r & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{r'} & 0 \\ 0 & 0 & M'\end{pmatrix}$$

où M' est la matrice de l'isométrie $\varphi' = \varphi|_{E'}$ dans la base $(\mathbf{e}_{r+r'+1}, \dots, \mathbf{e}_n)$, qui est la restriction de φ au sous-espace $E' = \langle \mathbf{e}_{r+r'+1}, \dots, \mathbf{e}_n\rangle$. Alors φ' (et M'), n'a pas de valeur propre réelle, car sinon on devrait augmenter r ou r' (une valeur propre réelle d'une isométrie doit être égale à 1 ou -1). Ainsi, on peut appliquer le résultat du point (3) ci-dessus $\frac{n-(r+r')}{2}$ fois pour obtenir le résultat voulu.

Solution de l'exercice 3. 1. Soit $v' = \frac{v}{|v|}$ le normalisé de v. Soit $(v_2, \ldots, v_n)$ une BON de l'hyperplan $v^\perp$. Alors $(v', v_2, \ldots, v_n)$ est une BON de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de s_v est la matrice diagonale $\operatorname{diag}(-1, 1, \ldots, 1)$ car v' est vecteur propre de valeur propre -1 et les v_i, $i = 2, \ldots, n$, sont vecteurs propres de valeur propre 1 (i.e., ils sont fixés par s_v).

2. Soit φ une isométrie linéaire de $\mathbb{R}^n$. Par l'exercice 2, soit

$$B = (u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_{r'}, w_{1,1}, w_{2,1}, \ldots, w_{1,r''}, w_{2,r''})$$

une BON de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de φ est de la forme

$$M_B = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_r & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -\mathrm{Id}_{r'} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & M_{2,1} & \ldots & 0 \\ \vdots & \ldots & 0 & \ldots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & M_{2,r''} \end{pmatrix}$$

où $r + r' + 2r'' = n$ et les $M_{2,i}$ sont des matrices 2×2 de rotation.

La matrice $M_{2,i}$ est la matrice de la rotation linéaire φ_i, qui est la restriction de φ au sous-espace $\langle w_{1,i}, w_{2,i} \rangle$, dans la BON $(w_{1,i}, w_{2,i})$. Vu l'exercice (1.1), On peut écrire $\varphi_i = s_i \circ s_i'$ pour deux symétries orthogonales s_i, s_i' de $\langle w_{1,i}, w_{2,i} \rangle \cong \mathbb{R}^2$. On pose alors $S_i = \mathrm{id}_{B_i} \oplus s_i$ l'isométrie qui agit selon s_i sur $\langle w_{1,i}, w_{2,i} \rangle$ et qui fixe B_i le sous-espace de $\mathbb{R}^n$ généré par la base B à laquelle on retire $w_{1,i}, w_{2,i}$. On définit de manière similaire S_i' à partir de s_i'. Les isométries S_i, S_i' sont alors des symétries hyperplanes (même argument que dans l'exercice (1.2) ci-dessus).

Dès lors, on a la décomposition de φ en un produit de symétries hyperplanes linéaires

$$\varphi = \mathrm{sym}_{v_1} \circ \cdots \circ \mathrm{sym}_{v_{r'}} \circ (S_1 \circ S_1') \circ \cdots \circ (S_{r''} \circ S_{r''}').$$

3. Voir exercice 1.4.

4. Toute isométrie affine φ s'écrit comme le produit de isométrie linéaire et d'une translation. On peut écrire sa partie linéaire comme un produit de symétries hyperplanes (linéaires) par le point (2) et on peut écrire sa partie translation comme produit de symétries hyperplanes (affines) par le point (3). Ainsi, on peut écrire φ comme produit de symétries hyperplanes affines. Cela montre que le groupe des isométries affines est engendré par l'ensemble des symétries hyperplanes.