EPFL Mai 2020
Géométrie, MATH-125

Corrigé partiel de la série 11

Exercice. 6

Rappelons que le cube possède 6 *faces,* 12 *arêtes,* 8 *sommets.*
Son groupe de rotations, $G_{cube} \cong S_4$ *donc d'ordre* 24 *et est constitué de*

- *L'identité.*
- 2×4 *rotations d'ordre* 3 *d'axe passant par une paire de sommets opposés.*
- 2×3 *rotations d'ordre* 4 *d'axe passant par les centres d'une paire de faces opposées.*
- 1×3 *rotations d'ordre* 2 *d'axe passant par les centres d'une paire de faces opposées.*
- 1×6 *rotations d'ordre* 2 *d'axe passant par les milieux de deux arêtes opposées.*

C'est une application classique de la formule de Burnside : deux cubes colorés représentent le même modèle, si l'on peut passer de l'un à l'autre par une rotation. On considère alors l'ensemble $X(n)$ *des cubes colorés sur les faces par* n *couleurs ; le groupe* G_{cube} *agit sur cet ensemble par rotations et le nombre de modèles de cubes colorés est égal au nombres d'orbites sous l'action du groupe* G_{cube}*. Pour calculer le nombre d'orbite on utilise le lemme de Burnside :*

$$|X(n)/G_{cube}| = \frac{1}{24} \sum_{g \in G_{cube}} |X(n)^g|.$$

On classifie les rotations de G_{cube}

- *Identité :*
$$|X(n)^e| = n^6$$
- 2×4 *rotations d'ordre* 3 *d'axe passant par deux sommets opposes :*
$$|X(n)^g| = n^2$$
- 2×3 *rotations d'ordre* 4 *d'axe passant par deux centres de faces opposées :*
$$|X(n)^g| = n^3$$
- 1×3 *rotations d'ordre* 2 *d'axe passant deux centres de faces opposées :*
$$|X(n)^g| = n^4$$
- 1×6 *rotations d'ordre* 2 *d'axe passant par deux milieux d'arêtes opposées :*
$$|X(n)^g| = n^3$$

Finalement,

$$|X(n)/G_{cube}| = \frac{1}{24}(n^6 + 8 \times n^2 + 6 \times n^3 + 3 \times n^4 + 6 \times n^3) = \frac{1}{24}(n^6 + 3n^4 + 12n^3 + 8n^2)$$

Pour $n = 3$ *:*

$$|X(3)/G_{cube}| = \frac{1}{24}(3^6 + 8 \times 3^2 + 6 \times 3^3 + 3 \times 3^4 + 6 \times 3^3) = 57.$$

Deux astuces pour effectuer les coloriages en un clin d'oeil. Premièrement, on se souvenir de la formule d'Euler-Descartes peut être très utile pour s'assurer de ne pas avoir d'erreur dans le nombre de face/arêtes sommets :

$$f + s - a = 2.$$

Ensuite, le calcul de $|X(n)^g|$ *peut-être fastidieux on pourra utiliser l'ordre de la rotation le raccourcir (le cas du tétraèdre est subtil, mais compter à la main dans un tétraèdre est rapide). On considère les objets coloriés par lequel ne passe pas l'axe et on le divise par l'ordre de la rotation, si ce nombre d'objets est inférieur à celui du solide on ajoute deux. Ici, un exemple vaut milles mots :*
g désigne une rotations d'ordre 2 du cube dont l'axe passe par deux faces et on colorie les faces. Il reste 4 faces par lequel l'axe ne passe pas $4/2 = 2$ *on ajoute les deux faces enlevé au début* $|X(n)^g| = n^{2+2} = n^4$ *g désigne une rotations d'ordre 3 du cube dont l'axe passe par deux sommets et on colorie les faces. Il reste 6 faces par lequel l'axe ne passe pas* $6/3 = 2$ *on n'ajoute rien alors :* $|X(n)^g| = n^{2+0} = n^2$

Exercice. 7

Considérons le problème, la dualité icosaèdre/dodécaèdre nous permet de réduire le problème à la coloration des faces et sommets d'un dodécaèdre régulier avec n et m couleurs. En effet, le fait que le dodécaèdre soit tronqué ne change rien aux rotations le préservant et les faces triangulaires peuvent être associé au sommets du dodécaèdre.

Lorsqu'on colorie plusieurs éléments avec n et m les points fixes deviennent :

$$|X(n,m)^g| = n^{choix\ face} m^{choix\ sommet}$$

Rappelons que le dodécaèdre possède 12 *faces,* 30 *arêtes,* 20 *sommets.*
Son groupe de rotations, $G_d \cong A_5$ *donc d'ordre* 60 *et est constitué de*

- *L'identité.*
- 10×2 *rotations d'ordre* 3 *d'axe passant par une paire de sommets opposés.*
- 6×4 *rotations d'ordre* 5 *d'axe passant par les centres d'une paire de faces opposées.*
- 15×1 *rotations d'ordre* 2 *d'axe passant par les milieux de deux arêtes opposées.*

On applique la formule de Burnside : deux dodécaèdre colorés représentent le même modèle, si l'on peut passer de l'un à l'autre par une rotation. On considère alors l'ensemble $X(n, m)$ *des dodécaèdre aux faces et sommets colorés par m et n couleurs ; le groupe* G_d *agit sur cet ensemble par rotations et le nombre de modèles de cubes colorés* *est égal au nombres d'orbites sous l'action du groupe G_d. Pour calculer le nombre d'orbite on utilise le lemme de Burnside :*

$$|X(n,m)/G_d| = \frac{1}{60}\sum_{g\in G_d}|X(n,m)^g|.$$

On classifie les rotations de G_d

- *Identité :*
$$|X(n,m)^e| = n^{12}m^{20}$$
- 10×2 *rotations d'ordre* 3 *d'axe passant par deux sommets opposes :*
$$|X(n,m)^g| = n^4m^6$$
- 6×4 *rotations d'ordre* 5 *d'axe passant par deux centres de faces opposées :*
$$|X(n,m)^g| = n^4m^4$$
- 15×1 *rotations d'ordre* 2 *d'axe passant par deux milieux d'arêtes opposées :*
$$|X(n,m)^g| = n^6m^{10}$$

Finalement,

$$|X(n,m)/G_d| = \frac{1}{60}(n^{12}m^{20} + 20n^4m^6 + 15n^6m^{10} + 24n^4m^4)$$

Exercice. 9

On applique le théorème de Pythagore au triangle rectangle isocèle dont l'hypoténuse est l'arrête recherchée sa longueur est alors de $\sqrt{2\frac{a^2}{4}} = a\frac{\sqrt{2}}{2}$

On réalise le cube tronqué comme l'intersection d'un cube et d'un octaèdre. Le groupe de rotation préservant le cube tronqué est l'intersection des groupes de rotations des deux solides, la dualité cube/octaèdre nous assure que cette intersection est isomorphe à S_4 *(les deux groupes sont identique leur intersection est donc le groupe entier). Cela permet de réduire le problème à la coloration des faces et sommets d'un cube régulier avec t et c couleurs. En effet, le fait que le cube soit tronqué ne change rien aux rotations le préservant et les faces triangulaires peuvent être associé au sommets du cube.*

Lorsqu'on colorie plusieurs éléments avec n et m les points fixes deviennent :

$$|X(c,t)^g| = c^{\text{choix face}}t^{\text{choix sommet}}$$

Rappelons que le cube possède 6 *faces,* 12 *arêtes,* 8 *sommets.*
Son groupe de rotations, $G_{cube} \cong S_4$ *donc d'ordre* 24 *et est constitué de*

- *L'identité.*
- 2×4 *rotations d'ordre* 3 *d'axe passant par une paire de sommets opposés.*
- 2×3 *rotations d'ordre* 4 *d'axe passant par les centres d'une paire de faces opposées.*

— 1×3 *rotations d'ordre 2 d'axe passant par les centres d'une paire de faces opposées.*
— 1×6 *rotations d'ordre 2 d'axe passant par les milieux de deux arêtes opposées.*

C'est une application classique de la formule de Burnside : deux cubes colorés représentent le même modèle, si l'on peut passer de l'un à l'autre par une rotation. On considère alors l'ensemble $X(c,t)$ des cubes colorés sur les faces par c couleurs et les sommets par s couleurs ; le groupe G_{cube} agit sur cet ensemble par rotations et le nombre de modèles de cubes colorés est égal au nombres d'orbites sous l'action du groupe G_{cube}. Pour calculer le nombre d'orbite on utilise le lemme de Burnside :

$$|X(c,t)/G_{cube}| = \frac{1}{24} \sum_{g \in G_{cube}} |X(c,t)^g|.$$

On classifie les rotations de G_{cube}

— *Identité :*

$$|X(c,t)^e| = c^6 t^8$$

— 2×4 *rotations d'ordre 3 d'axe passant par deux sommets opposes :*

$$|X(c,t)^g| = c^2 t^4$$

— 2×3 *rotations d'ordre 4 d'axe passant par deux centres de faces opposées :*

$$|X(c,t)^g| = c^3 t^2$$

— 1×3 *rotations d'ordre 2 d'axe passant deux centres de faces opposées :*

$$|X(c,t)^g| = c^4 t^4$$

— 1×6 *rotations d'ordre 2 d'axe passant par deux milieux d'arêtes opposées :*

$$|X(c,t)^g| = c^3 t^4$$

Finalement,

$$|X(c,t)/G_{cube}| = \frac{1}{24}(c^6 t^8 + 8c^2 t^4 + 6c^3 t^2 + 3c^4 t^4 + 6c^3 t^4)$$

On considère les cas $(c,t) = (3,1)$ et $(c,t) = (1,2)$ et on a bien :

$$|X(3,1)/G_{cube}| = 57 \text{ et } |X(1,2)/G_{cube}| = 23$$