Homework 7
Traitement Quantique de l'Information

Exercise 1 *Codage superdense avec des paires EPR imparfaites*

Alice est dans la Station Spatiale et Bob sur la Terre. Ils partagent une paire de photons dans l'état

$$|B_\theta\rangle = \cos\theta|00\rangle + \sin\theta|11\rangle, \qquad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Alice possède le premier photon et Bob le second.

1) Montrez que la paire est intriqué si et seulement si $\theta \neq 0, \frac{\pi}{2}$.

2) Pour envoyer un message $xy = 00, 01, 10, 11$ à Bob, Alice utilise le protocole usuel du codage superdense (car θ est inconnu). En d'autres termes pour envoyer 00 elle envoie tout simplement *son* photon à Bob ; pour envoyer 01 elle effectue l'opération unitaire X sur *son* photon puis l'envoie à Bob ; pour envoyer 10 elle effectue l'opération unitaire Z sur *son* photon puis l'envoie à Bob ; pour envoyer 11 elle effectue l'opération unitaire iY sur *son* photon puis l'envoie à Bob. Calculez les 4 états possibles de la paire quand Bob recoit le photon d'Alice.

3) Supposons concrètement qu'Alice désire envoyer le message 00. Lorsque Bob possède les deux photons de la paire, il utilise le protocole usuel du codage superdense (car θ est inconnu). Il effectue donc une mesure dans la base de Bell. Cette base est constituée des 4 états

$$|B_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle),$$
$$|B_{01}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle),$$
$$|B_{10}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle),$$
$$|B_{11}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle).$$

   Quels sont les messages possibles observés par Bob et quelles sont leurs probabilités ? Pour quel $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ la probabilité d'erreur de transmission est-elle minimale ? Maximale ?

Exercise 2 *Echange d'intrication ou "entanglement swapping"*

Lorsque l'on produit deux bits quantiques intriqués on peut en th orie les séparer spatialement autant que voulu tout en conservant l'intrication. En pratique il ya aura une limite de distance à cause de l'interaction avec l'environnement. Par exemple pour des photons s par s travers une fibre optique, la limitation vient de l'atténuation de l'intensité avec la distance. D'où la nécessité d'inventer des "répétiteurs quantiques." La méthode étudiée dans cet exercice permet de créer de l'intrication sur des distances plus éloignées.

Alice et Bob sont séparés par une distance $2L$. Supposons que Charlie se trouve au milieu, donc à distance L d'Alice et à distance L de Bob. Charlie produit *deux paires intriquées* dans les états $|B_{00}\rangle_{12}$ et $|B_{00}\rangle_{34}$. Il a donc 4 qubits appelés $1, 2, 3, 4$. Charlie garde dans son labo les particules 2 et 3 et envoie à Alice et Bob les particules 1 et 4.

Maintenant Charlie fait une mesure dans la base de Bell sur les deux particules 2 et 3 qu'il a gardé dans son labo.

1) Quels sont les résultats possible de la mesure dans le labo de Charlie ?

2) Montrez que pour chacun des résultats ci-dessus les particules 1 et 4 deviennent intriquées (sur une distance $2L$). Faites le calcul d taill dans un des cas et donnez uniquement le résultat pour les autres.

Indication : l'état des quatre particules avant la mesure est

$$|B_{00}\rangle_{12} \otimes |B_{00}\rangle_{34} \, .$$

La mesure de Charlie projette l'état avec un des quatres projecteurs pris aléatoirement :

$$I_1 \otimes |B_{00}\rangle_{23}\langle B_{00}|_{23} \otimes I_4$$

$$I_1 \otimes |B_{01}\rangle_{23}\langle B_{01}|_{23} \otimes I_4$$

$$I_1 \otimes |B_{10}\rangle_{23}\langle B_{10}|_{23} \otimes I_4$$

$$I_1 \otimes |B_{11}\rangle_{23}\langle B_{11}|_{23} \otimes I_4$$

L'espace de Hilbert total est ici $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$. Les vecteurs sont à 16 dimensions et les projecteurs sont des matrices 16×16. Il est avantageux de faire les calculs en notation de Dirac !