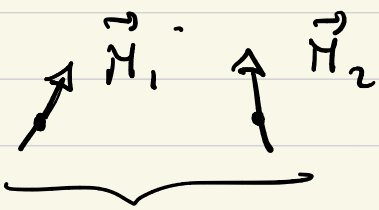
# Hamiltonien de Heisenberg.

- Chap 9 des Notes.

Ham heis = fct d'énergie pour des paires de moments magnétique.




interaction spin-spin
qubit-qubit.

**Interaction entre qubits**
**utile pour fabriquer portes logiques.**

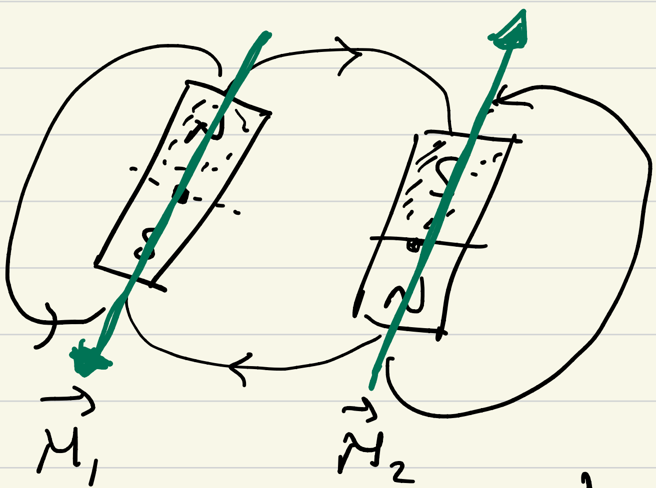
$$\text{CNOT}\ \underset{\substack{\uparrow\\ \text{bit de contrôle}}}{|x\rangle} \otimes \underset{\substack{\uparrow\\ \text{target bit}}}{|y\rangle} = |x\rangle \otimes |y \oplus x\rangle$$

$$\text{SWAP}\ |x\rangle \otimes |y\rangle = |y\rangle \otimes |x\rangle$$

"SWAP".

→ Très important pour réaliser le Calcul Quantique
→ Liens entre Ham de Heis et états de Bell.

## Interaction entre deux moments magnétiques classiques.




force magnétique qui fait que le S et N s'attirent et donc les boussoles ou les moments magn "s'anti-alignent".

$$\text{Energie} \simeq \underbrace{c.\,\vec{M}_1 \cdot \vec{M}_2}_{} + \dots$$

pr scalaire invariant sous les rotation et du premier ordre en $\vec{M}_1$ et $\vec{M}_2$.

Ici pr. sc est minimal si $\vec{M}_1$ et $\vec{M}_2$ sont opposés.

En Phys Quantique (p. ex: Noyaux atomiques portent moments magnétiques).

$$\vec{M}_1 = \gamma_1 \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}_1 \qquad \vec{\sigma}_1 = (\sigma_x^{(1)}, \sigma_y^{(1)}, \sigma_z^{(1)})$$

$$\vec{M}_2 = \gamma_2 \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}_2 \qquad \vec{\sigma}_2 = (\sigma_x^{(2)}, \sigma_y^{(2)}, \sigma_z^{(2)}).$$

$$\boxed{H = c.\vec{M}_1 \cdot \vec{M}_2 = \underbrace{\hbar J}_{\to\,[\text{Joule}]}\, \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2}$$

Hamiltonien de Heisenberg.

$\hbar = \frac{h}{2\pi}$ Joule.sec

$J = [Hz]$ Hertz.

## Etude de $H = \hbar J \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$ . Ham de Heisenberg.

- Remarque sur le pr. scalaire $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$ :

$$\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 = \sigma_x^{(1)} \otimes \sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(1)} \otimes \sigma_y^{(2)} + \sigma_z^{(1)} \otimes \sigma_z^{(2)}$$

Esp d'Hilbert $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ deux spins
deux qubits

$$= \underbrace{\underset{\text{matrice } 2\times 2}{\sigma_x^{(1)}} \otimes \underset{\text{mat } 2\times 2}{\sigma_x^{(2)}}}_{\text{Matrice } 4\times 4.} + \underbrace{\sigma_y^{(1)} \otimes \sigma_y^{(2)}}_{4\times 4.} + \underbrace{\sigma_z^{(1)} \otimes \sigma_z^{(2)}}_{4\times 4.}$$

- Diverses représentations de $H_{heis}$.

- repr en terme des $\sigma$.
- repr en Notation de Dirac.
- repr en tableau matriciel.

- <u>Représentations en terme de matrices de Pauli</u>

$$H = \hbar J \left( \sigma_x^{(1)} \otimes \sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(1)} \otimes \sigma_y^{(2)} + \sigma_z^{(1)} \otimes \sigma_z^{(2)} \right).$$

$$\begin{cases} \sigma^+ = \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y) : & \sigma^+|\uparrow\rangle = 0 \quad \sigma^+|\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle \\ \sigma^- = \frac{1}{2}(\sigma_x - i\sigma_y) ; & \sigma^-|\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle \quad \sigma^-|\downarrow\rangle = 0. \end{cases}$$

$$\sigma_x = \sigma^+ + \sigma^- \quad \text{et} \quad i\sigma_y = \sigma^+ - \sigma^-$$

on peut remplacer dans $H$ :

$$\sigma_x^{(1)} \otimes \sigma_x^{(2)} = (\sigma_1^+ + \sigma_1^-) \otimes (\sigma_2^+ + \sigma_2^-)$$

$$= \underline{\sigma_1^+ \otimes \sigma_2^+} + \underline{\sigma_1^- \otimes \sigma_2^-} + \sigma_1^+ \otimes \sigma_2^- + \sigma_1^- \otimes \sigma_2^+$$

$$\sigma_y^{(1)} \otimes \sigma_y^{(2)} = -(\sigma_1^+ - \sigma_1^-) \otimes (\sigma_2^+ - \sigma_2^-)$$

$$= -\left(\underline{\sigma_1^+ \otimes \sigma_2^+} + \underline{\sigma_1^- \otimes \sigma_2^-} - \sigma_1^+ \otimes \sigma_2^- - \sigma_1^- \otimes \sigma_2^+\right)$$

on additionne pour trouver

$$\sigma_x^{(1)} \otimes \sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(1)} \otimes \sigma_y^{(2)} = 2\left(\sigma_1^+ \otimes \sigma_2^- + \sigma_1^- \otimes \sigma_2^+\right).$$

$$\Rightarrow H = \hbar J \left\{ \sigma_1^z \otimes \sigma_2^z + 2 \underbrace{(\sigma_1^+ \otimes \sigma_2^- + \sigma_1^- \otimes \sigma_2^+)}_{\text{terme.}} \right\}.$$

Cette forme ici $\nearrow$ très utile pour faire les calculs.

$$(\sigma_1^+ \otimes \sigma_2^- + \sigma_1^- \otimes \sigma_2^+)(|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle)$$

$$= \underbrace{\sigma_1^+ |\uparrow\rangle}_{0} \otimes \underbrace{\sigma_2^- |\downarrow\rangle}_{0} + \underbrace{\sigma_1^- |\uparrow\rangle}_{} \otimes \sigma_2^+ |\downarrow\rangle.$$

$$= \quad 0 \qquad\qquad 0 \qquad\qquad |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle.$$

Le "terme" a fait un SWAP ou échange des 2 qubits.

(On appelle ce terme souvent l'interaction d'échange.).

- $H$ en Notation de Dirac.

$$H = \hbar J \left\{ \sigma_1^z \otimes \sigma_2^z + 2\left(\sigma_1^+ \otimes \sigma_2^- + \sigma_1^- \otimes \sigma_2^+\right)\right.$$

$$\sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = |\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow| .$$

$$\sigma^+ = \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = |\uparrow\rangle\langle\downarrow| .$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark \Leftrightarrow |\uparrow\rangle\overbrace{\langle\downarrow|\uparrow\rangle}^{0} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark \Leftrightarrow |\uparrow\rangle\overbrace{\langle\downarrow|\downarrow\rangle}^{1} = |\uparrow\rangle .$$

$$\sigma^- = \frac{1}{2}(\sigma_x - i\sigma_y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = |\downarrow\rangle\langle\uparrow| .$$

$H$ en Notation de Dirac dans la base $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$.

$$\boxed{H} = \hbar J \Big\{ \left(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|\right) \otimes \left(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|\right)$$

$$+ 2\, |\uparrow\rangle\langle\downarrow| \otimes |\downarrow\rangle\langle\uparrow| + 2\, |\downarrow\rangle\langle\uparrow| \otimes |\uparrow\rangle\langle\downarrow| \Big\}$$

$$\boxed{\begin{aligned} = \hbar J \Big\{ & |\uparrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\uparrow| + |\downarrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\downarrow| - |\uparrow\downarrow\rangle\langle\uparrow\downarrow| - |\downarrow\uparrow\rangle\langle\downarrow\uparrow| \\ & + 2\, |\uparrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\uparrow| + 2\, |\downarrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\downarrow| \Big\} . \end{aligned}}$$

## • $H$ en composantes.

Dirac $\rightarrow$ aux composantes :

$$
\begin{aligned}
H = \hbar J \Big\{ & |\uparrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\uparrow| + |\downarrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\downarrow| \\
& - |\uparrow\downarrow\rangle\langle\uparrow\downarrow| - |\downarrow\uparrow\rangle\langle\downarrow\uparrow| \\
& + 2\,|\uparrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\uparrow| + 2\,|\downarrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\downarrow| . \Big\} .
\end{aligned}
$$

$$
= \hbar J
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} \overset{00}{\uparrow\uparrow} & \overset{01}{\uparrow\downarrow} & \overset{10}{\downarrow\uparrow} & \overset{11}{\downarrow\downarrow} \end{array} \\
\begin{bmatrix}
\boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 2 & 0 \\
0 & 2 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \boxed{1}
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{ll}
\uparrow\uparrow & 00 \\
\uparrow\downarrow & 01 \\
\downarrow\uparrow & 10 \\
\downarrow\downarrow & 11
\end{array}
$$

dans la base $\{ |\uparrow\rangle , |\downarrow\rangle \}$.

$$H = \hbar J \left\{ \underline{\sigma_1^z \otimes \sigma_2^z} + 2\left(\sigma_1^+ \otimes \sigma_2^- + \sigma_1^- \otimes \sigma_2^+\right) \right\}.$$

Etats propres et valeurs propres de $H_{\text{Heis}}$.

- Action de $H$ sur $|\uparrow\uparrow\rangle$, $|\downarrow\downarrow\rangle$.

$$H|\uparrow\uparrow\rangle = \hbar J\, \sigma_1^z|\uparrow\rangle \otimes \sigma_2^z|\uparrow\rangle + \ldots 0 \ldots$$

$$= \hbar J\, |\uparrow\uparrow\rangle.$$

$$\underbrace{\sigma_1^+|\uparrow\rangle}_{0} \qquad \underbrace{\sigma_2^+|\uparrow\rangle}_{0.}$$

$$H|\downarrow\downarrow\rangle = \hbar J\, \sigma_1^z|\downarrow\rangle \otimes \sigma_2^z|\downarrow\rangle + 0.$$

$$= \hbar J\, |\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle.$$

$$\underbrace{\sigma_2^-|\downarrow\rangle}_{0} \qquad \sigma_1^-|\downarrow\rangle = 0.$$

Ici on voit que $\underline{|\uparrow\uparrow\rangle}$ et $\underline{|\downarrow\downarrow\rangle}$ sont états propres de $H$ avec v.p $\hbar J$.

- Action de $H$ sur $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right)$.

$\longrightarrow$

$$H \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right)$$

la partie $\sigma_1^z \otimes \sigma_2^z \left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right)$

$$= \sigma_1^z|\uparrow\rangle \otimes \sigma_2^z|\downarrow\rangle + \sigma_1^z|\downarrow\rangle \otimes \sigma_2^z|\uparrow\rangle$$

$$= -|\uparrow\rangle\otimes|\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle\otimes|\uparrow\rangle$$

$$= -\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right)$$

la partie $\sigma_1^+ \otimes \sigma_2^- \left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right) = |\uparrow\downarrow\rangle$

$$\sigma_1^- \otimes \sigma_2^+ \left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right) = |\downarrow\uparrow\rangle$$

$$H \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right) = \hbar J\left\{-1 + 2\right\} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right)$$

$$= \hbar J \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right).$$

$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right) \text{ état propre de } H \text{ avec v.p } \hbar J}$.

→ On dit que

$$\left\{ |\uparrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right) \right\}$$ forment

un <u>triplet</u> d'énergie $\hbar J$. (même énergie).

- Action de $H$ sur $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right)$.

la partie $\sigma_1^z \otimes \sigma_2^z \left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right) = -|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle$

$$= -\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right).$$

la partie $2\left(\sigma_1^+ \otimes \sigma_2^- + \sigma_1^- \otimes \sigma_2^+\right)\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right)$.

$$= \underline{\underline{-2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right).$$

(à faire en détail comme exercice)

$$H \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right) = \hbar J \left\{-1 - 2\right\} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right)$$

$$= -3\hbar J \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right)$$

l'état $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right)$ est un état propre de $H$ avec v.p $-3\hbar J$. "Etat singlet"

## Résumé sur un axe d'énergie :

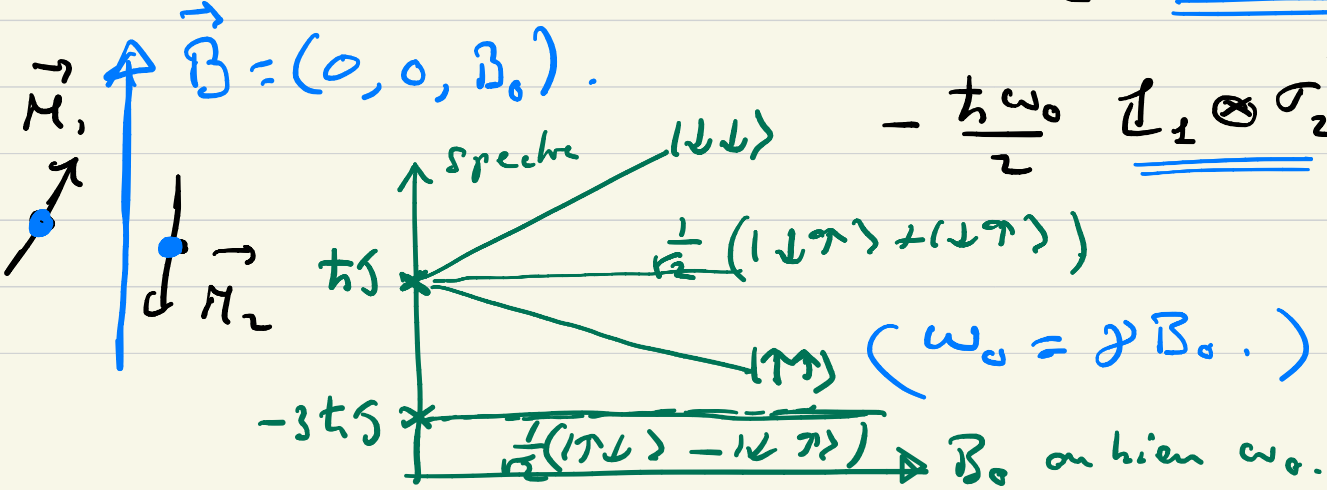
Energies ou valeurs propres de $\mathcal{H}$. (le spectre de $\mathcal{H}$).

$+\hbar J$ × états propres $|\uparrow\uparrow\rangle$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)$, $|\downarrow\downarrow\rangle$ "le triplet".

$-3\hbar J$ × état propre $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$ "le singulet".

## $\boxed{\text{Dans les notes ; Complément}}$

$$H_{heis} + H_{Larmor} = \hbar J \, \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 - \frac{\hbar\omega_0}{2} \sigma_1^z \otimes \mathbb{1}_2 - \frac{\hbar\omega_0}{2} \mathbb{1}_1 \otimes \sigma_2^z \, .$$



# Applications de l'interaction de Heisenberg.

1) Réalisation porte SWAP.
2) Réalisation porte CNOT.

**Par Définition dans la base orthonormée computationelle**

$\{|0\rangle,$ [redacted] ou $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$.

$$\begin{cases} \text{SWAP}\left(|x\rangle \otimes |y\rangle\right) = \left(|y\rangle \otimes |x\rangle.\right) \\ \text{CNOT}\left(|x\rangle \otimes |y\rangle\right) = \left(|x\rangle \otimes |\underbrace{y \oplus x}_{\text{language } 1 \text{ et } 0.}\rangle.\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{CNOT}\ \underbrace{|\uparrow\rangle}_{|0\rangle} \otimes \underbrace{|\downarrow\rangle}_{|1\rangle.} = |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle. \\ \text{CNOT}\ |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle. \\ \text{CNOT}\ \underbrace{|\downarrow\rangle}_{|1\rangle} \otimes \underbrace{|\uparrow\rangle}_{|0\rangle} = |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle. \\ \text{CNOT}\ \underbrace{|\downarrow\rangle}_{|1\rangle} \otimes \underbrace{|\downarrow\rangle}_{|1\rangle} = |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle. \end{cases}$$

Faire un bit flip. ou spin flip si le control bit est $|\downarrow\rangle$.

dim = 4

- 2 qubits ou 2 spins $\mathcal{H}_{\text{total}} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$.

pour réaliser SWAP et CNOT on a besoin d'une interaction physique entre les 2 qubits ou spins.

- On va utiliser

$$H_{\text{heisenberg}} = \text{interaction spin-spin.}$$

(indépendant du temps)

et l'opérateur d'évolution temporelle associé :

$$U_{\text{heis}}(t) = \exp\left(-i\frac{t}{\hbar} H_{\text{heis}}\right).$$

Matrice 4×4 unitaire

. Stratégie : calculer $U_{\text{heis}}(t)$ en général.

puis prendre temps $t$ approprié $t_*$

pour en déduire SWAP. $= U_{\text{heis}}(t_*)$.

voir plus tard.

Calcul de $U_{heis}(t) = \exp\left(-i\frac{t}{\hbar} H_{heis}\right)$.

$\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$.

$$H_{heis} = \hbar J \underbrace{\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2}$$
$$= \underbrace{\hbar J} \left(\sigma_1^x \otimes \sigma_2^x + \sigma_1^y \otimes \sigma_2^y + \sigma_1^z \otimes \sigma_2^z\right).$$

$\begin{cases} \text{Joule.} \\ \hbar = \text{Joule} \cdot \text{sec} \\ J = \text{Hz}. \end{cases}$

Pour calculer l'exponentielle le plus simple est de prendre la base t.q $H_{heis}$ est diagonale.

En Notation de Dirac :

état singulet.

$$H_{heis} = -\underbrace{3\hbar J}_{v.p} \overbrace{\frac{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}}^{ket} \overbrace{\frac{\langle\uparrow\downarrow| - \langle\downarrow\uparrow|}{\sqrt{2}}}^{bra}$$

$$+ \underbrace{\hbar J}_{v.p} \left\{ |\uparrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\uparrow| + \frac{|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} \frac{\langle\uparrow\downarrow| + \langle\downarrow\uparrow|}{\sqrt{2}} + |\downarrow\downarrow\rangle \right\}$$

états triplet.

$$= \begin{pmatrix} -3\hbar J & & & 0 \\ & \hbar J & & \\ & & \hbar J & \\ 0 & & & \hbar J \end{pmatrix}$$ dans la base (état sing + états triplet).

Puisque la matrice est diagonale dans la base {sing + triplet}

$$\underline{\exp\left(-\frac{it}{\hbar} H_{heis}\right)} = \begin{pmatrix} e^{i3tJ} & & & 0 \\ & e^{-itJ} & & \\ & & e^{-itJ} & \\ 0 & & & e^{-itJ} \end{pmatrix}$$ dans base {sing + triplet}.

Notation de Dirac.

$$= e^{\frac{i3tJ}{t_*}} \frac{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} \frac{\langle\uparrow\downarrow| - \langle\downarrow\uparrow|}{\sqrt{2}}.$$

$$+ e^{\frac{-itJ}{t_*}} \left\{ |\uparrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\uparrow| + \frac{|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} \frac{\langle\uparrow\downarrow| + \langle\downarrow\uparrow|}{\sqrt{2}} + |\downarrow\downarrow\rangle \right\}.$$

Il est facile de réarranger les termes dans la base computationelle : $|\uparrow\uparrow\rangle$, $|\uparrow\downarrow\rangle$, $|\downarrow\uparrow\rangle$, $|\downarrow\downarrow\rangle$.

<u>exercice</u> !

<u>Rappel</u> :

$$\underline{\text{SWAP}} |\uparrow\uparrow\rangle = \underline{|\uparrow\uparrow\rangle}$$
$$\underline{\text{SWAP}} |\downarrow\downarrow\rangle = \underline{|\downarrow\downarrow\rangle}$$
$$\underline{\text{SWAP}} \frac{(|\downarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle)}{\sqrt{2}} = \underline{\frac{|\downarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle}{\sqrt{2}}}$$

Action sur triplet.

$$\underline{\text{SWAP}} \frac{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} = \underline{-\left(\frac{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}\right)}$$

Action sur singulet.

$$e^{\frac{3i\pi}{4}} = e^{i\pi - i\frac{\pi}{4}} = (-1)\, e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

On peut vérifier que si $t_* = \dfrac{\pi}{4J}$

$$U_{heis}\left(t_* = \frac{\pi}{4J}\right) = + e^{-i\frac{\pi}{4}} \Big\{ - \frac{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} \frac{\langle\uparrow\downarrow| - \langle\downarrow\uparrow|}{\sqrt{2}} \ldots\ldots\ldots$$

$$+ \underline{|\uparrow\uparrow\rangle}\langle\uparrow\uparrow| + \frac{|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} \frac{\langle\uparrow\downarrow| + \langle\downarrow\uparrow|}{\sqrt{2}} + |\downarrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\downarrow| \Big\}$$

A la phase $e^{-i\frac{\pi}{4}}$-près on a la porte SWAP.

En fait SWAP $= \{ \ldots \}$.

La phase ici est <u>globale</u> et inobservable.

<u>A vérifier.</u> perpendiculaire au triplet.

$$\{\ldots\} \frac{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} = - \frac{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$\{\ldots\} |\uparrow\uparrow\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle$$

$$\{\ldots\} |\downarrow\downarrow\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle$$

$$\{\ldots\} \frac{|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}.$$

# Porte CNOT : sa réalisation.

Au lieu de prendre $H_{Heis}$ (isotrope) on va prendre une variante : Hamiltonien de Heisenberg anisotrope.

$$\mathcal{H} = \sum_{i,j=1}^{3} \hbar J_{ij}\, \sigma_1^{(i)} \otimes \sigma_2^{(j)} . \qquad (4\times 4).$$

ici $i = x, y, z$ ; $j = x, y, z$.

$J_{ij}$ = éléments d'une matrice $3 \times 3$.

$\sigma_1^{(i)} \rightarrow \sigma_1^x, \sigma_1^y, \sigma_1^z$

$\sigma_2^{(j)} \rightarrow \sigma_2^x, \sigma_2^y, \sigma_2^z$

Mats de Pauli.

- Cas isotrope correspond à $\leftarrow$ pour porte SWAP

$$J_{ij} \rightarrow \begin{pmatrix} \hbar J & & 0 \\ & \hbar J & \\ 0 & & \hbar J \end{pmatrix} \qquad J_{xx} = J_{yy} = J_{zz} = \hbar J.$$

- Pour porte CNOT : $J_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hbar J \end{pmatrix}$ $\boxed{J_{zz} = \hbar J}$

$$\mathcal{H} = \hbar J \, \sigma_1^z \otimes \sigma_2^z .$$

$\uparrow$

pour réaliser le CNOT.

Matrice d'évolution temporelle :

$$U = e^{-\frac{it}{\hbar}\mathcal{H}} = e^{-itJ\,\sigma_1^z \otimes \sigma_2^z} .$$

Ici facile :

$$\sigma_1^z = |\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2^z = |\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\otimes$

$$\sigma_1^z \otimes \sigma_2^z = |\uparrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\uparrow| - |\uparrow\downarrow\rangle\langle\uparrow\downarrow| - |\downarrow\uparrow\rangle\langle\downarrow\uparrow| + |\downarrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\downarrow|$$

$$\sigma_1^z \otimes \sigma_2^z = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$ dans la base computationnelle.

$$U = e^{-\frac{it}{\hbar}H} = e^{-itJ\,\overbrace{\sigma_1^z \otimes \sigma_2^z}}.$$

$$= \begin{array}{c} \\ \uparrow\uparrow \\ \uparrow\downarrow \\ \downarrow\uparrow \\ \downarrow\downarrow \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \uparrow\uparrow & \uparrow\downarrow & \downarrow\uparrow & \downarrow\downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} e^{-itJ} & & & \\ & e^{+itJ} & & \\ & & e^{+itJ} & \\ & & & e^{-itJ} \end{pmatrix} \end{array}$$

dans la base computationnelle.

Dirac

$$= e^{-itJ}\,|\uparrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\uparrow| + e^{itJ}\,|\uparrow\downarrow\rangle\langle\uparrow\downarrow| + e^{itJ}\,|\downarrow\uparrow\rangle\langle\downarrow\uparrow| + e^{-itJ}\,|\downarrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\downarrow|.$$

Pour obtenir CNOT on prend $t = \frac{\pi}{4J}$ et on fait les opérations suivantes.

$$\mathrm{CNOT} = \underbrace{(\mathbb{1}_1 \otimes H_2)}_{4\times4}\underbrace{(R_1 \otimes R_2)}_{4\times4}\underbrace{\left(e^{-i\frac{\pi}{4J\hbar}H}\right)}_{4\times4}\underbrace{(\mathbb{1}_1 \otimes H_2)}_{4\times4}$$

interaction!

exercice

avec $R_1 = \underbrace{e^{-i\frac{\pi}{4}\sigma_1^z}}_{2\times2}$ et $R_2 = \underbrace{e^{-i\frac{\pi}{4}\sigma_2^z}}_{2\times2}$.

p. ex $H_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $R_1 = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\pi}{4}} & 0 \\ 0 & e^{+i\pi/4} \end{pmatrix}$