

---

Homework 7 : Solution  
 Traitement Quantique de l'Information

---

**Exercise 1** *Codage superdense avec des paires EPR imparfaites*

1) Suppose that we can find two states with

$$|B_\theta\rangle = (a_1 |0\rangle + b_1 |1\rangle) \otimes (a_2 |0\rangle + b_2 |1\rangle).$$

Then, we have  $\cos(\theta) = a_1 a_2$  and  $\sin(\theta) = b_1 b_2$  and  $a_1 b_2 = 0$  and  $b_1 a_2 = 0$ . Since  $a_1 b_2 = 0$  then  $a_1 = 0$  or  $b_2 = 0$ . If  $a_1 = 0$ , we have  $\cos(\theta) = 0 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ . If  $b_2 = 0$  then  $\sin(\theta) = 0 \rightarrow \theta = 0$ . Since  $b_1 a_2 = 0$  then  $b_1 = 0$  or  $a_2 = 0$ . We arrive at the same conclusion. Thus only when  $\theta = 0$  or  $\theta = \frac{\pi}{2}$  can we write  $|B_\theta\rangle$  as a product state.

2) The four operations of Alice are

$$\begin{aligned} I_1 \otimes I_2 |B_\theta\rangle &= |B_\theta\rangle = \cos(\theta) |00\rangle + \sin(\theta) |11\rangle, \\ X_1 \otimes I_2 |B_\theta\rangle &= \cos(\theta) |10\rangle + \sin(\theta) |01\rangle, \\ Z_1 \otimes I_2 |B_\theta\rangle &= \cos(\theta) |00\rangle - \sin(\theta) |11\rangle. \\ iY_1 \otimes I_2 |B_\theta\rangle &= \cos(\theta) |10\rangle - \sin(\theta) |01\rangle. \end{aligned}$$

In the last equality, we use  $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $iY = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

3) Alice wants to send 00. Bob receives  $|B_\theta\rangle$  because she just sends her photon to Bob. The measurement outcomes of Bob are  $|B_{00}\rangle, |B_{01}\rangle, |B_{10}\rangle, |B_{11}\rangle$ , therefore

$$\begin{aligned} \text{Prob}(00) &= |\langle B_{00} | B_\theta \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{2} |(\langle 00 | + \langle 11 |)(\cos(\theta) |00\rangle + \sin(\theta) |11\rangle)|^2 \\ &= \frac{1}{2} (\cos(\theta) + \sin(\theta))^2 \\ &= \frac{1}{2} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta) \\ &= \frac{1 + \sin(2\theta)}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Prob}(01) &= |\langle B_{01} | B_\theta \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{2} |(\langle 01 | + \langle 10 |)(\cos(\theta) |00\rangle + \sin(\theta) |11\rangle)|^2 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Prob}(10) &= |\langle B_{10}|B_\theta\rangle|^2 \\
&= \frac{1}{2}|(\langle 00| - \langle 11|)(\cos(\theta)|00\rangle + \sin(\theta)|11\rangle)|^2 \\
&= \frac{1}{2}(\cos(\theta) - \sin(\theta))^2 \\
&= \frac{1}{2}(\cos^2\theta + \sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta) \\
&= \frac{1 - \sin(2\theta)}{2}.
\end{aligned}$$

and  $\text{Prob}(11) = |\langle B_{11}|B_\theta\rangle|^2 = 0$ . The messages observed by Bob are 00 or 10 with probabilities  $\frac{1+\sin(2\theta)}{2}$  and  $\frac{1-\sin(2\theta)}{2}$ . Thus, the probability of error is  $\text{Prob}(10) = \frac{1-\sin(2\theta)}{2}$ . It is minimal if  $\sin(2\theta) = 1 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$ . So if  $|B_{\theta=\frac{\pi}{4}}\rangle$  is a Bell state  $|B_{00}\rangle$ .

It is maximal if  $\sin(2\theta)$  is minimal in  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . That is the case if  $\theta = 0$ , i.e.,  $\text{Prob}(10) = \frac{1}{2}$  and  $|B_{\theta=0}\rangle = |00\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle$  a product state.

## Exercise 2 Echange d'intrication ou "entanglement swapping"

L'état des quatres particules avant la mesure est

$$|\Psi\rangle = |B_{00}\rangle_{12} \otimes |B_{00}\rangle_{34}$$

Les particules 2 et 3 sont dans le labo de Charlie qui fait une mesure dans la base de Bell. Cette base est constituée des vecteurs  $|B_{00}\rangle_{23}, |B_{01}\rangle_{23}, |B_{10}\rangle_{23}, |B_{11}\rangle_{23}$ . Les projecteurs associés sont donc (projecteur = ket-bra = vecteur colonne fois vecteur ligne) :

$$|B_{00}\rangle_{23}\langle B_{00}|_{23}, \quad |B_{01}\rangle_{23}\langle B_{01}|_{23}, \quad |B_{10}\rangle_{23}\langle B_{10}|_{23}, \quad |B_{11}\rangle_{23}\langle B_{11}|_{23}$$

Puisque Alice (qui possède la particule 1) et Bob (qui possède la particule 2) ne font aucune opération, le postulat de la mesure nous dit que l'état  $|\Psi\rangle$  est projeté aléatoirement par un des projecteurs suivants :

$$\begin{aligned}
P_{00} &= I_1 \otimes |B_{00}\rangle_{23}\langle B_{00}|_{23} \otimes I_4, \\
P_{01} &= I_1 \otimes |B_{01}\rangle_{23}\langle B_{01}|_{23} \otimes I_4, \\
P_{10} &= I_1 \otimes |B_{10}\rangle_{23}\langle B_{10}|_{23} \otimes I_4, \\
P_{11} &= I_1 \otimes |B_{11}\rangle_{23}\langle B_{11}|_{23} \otimes I_4.
\end{aligned} \tag{1}$$

Supposons que l'état est projeté par  $P_{00}$  et faisons le calcul de l'état résultant après la mesure :

$$P_{00}|\Psi\rangle = (I_1 \otimes |B_{00}\rangle_{23}\langle B_{00}|_{23} \otimes I_4)(|B_{00}\rangle_{12} \otimes |B_{00}\rangle_{34})$$

Le résultat final contient le vecteur  $|B_{00}\rangle_{23}$  qui est un état intriqué chez Charlie. Pour le

reste nous calculons

$$\begin{aligned}
\langle B_{00}|_{23}|B_{00}\rangle_{12}|B_{00}\rangle_{34} &= \frac{1}{(\sqrt{2})^3} \left( \langle 0|_2\langle 0|_3 + \langle 1|_2\langle 1|_3 \right) \left( |0\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3|0\rangle_4 + |0\rangle_1|0\rangle_2|1\rangle_3|1\rangle_4 \right. \\
&\quad \left. + |1\rangle_1|1\rangle_2|0\rangle_3|0\rangle_4 + |1\rangle_1|1\rangle_2|1\rangle_3|1\rangle_4 \right) \\
&= \frac{1}{(\sqrt{2})^3} \left( |0\rangle_1 \otimes |0\rangle_4 + |1\rangle_1 \otimes |1\rangle_4 \right) \\
&= \frac{1}{2} |B_{00}\rangle_{14}
\end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned}
P_{00}|\Psi\rangle &= |B_{00}\rangle_{23}\langle B_{00}|_{23}|B_{00}\rangle_{12}|B_{00}\rangle_{34} \\
&= \frac{1}{2} |B_{00}\rangle_{23} \otimes |B_{00}\rangle_{14}
\end{aligned} \tag{2}$$

L'état final normalisé après la mesure est

$$|B_{00}\rangle_{23} \otimes |B_{00}\rangle_{14}$$

Ainsi Charlie possède maintenant un état intriqué et Alice et Bob aussi! Les autres états possible sont

$$|B_{01}\rangle_{23} \otimes |B_{01}\rangle_{14}, \quad |B_{10}\rangle_{23} \otimes |B_{10}\rangle_{14}, \quad |B_{11}\rangle_{23} \otimes |B_{11}\rangle_{14}.$$

**Remarque sur les probabilités des résultats possibles :** La probabilité d'obtenir cet état est juste 1/4. Pour obtenir ce résultat on calcule la probabilité (voir remarque ci-dessous) :

$$\begin{aligned}
\langle \Psi | P_{00} | \Psi \rangle &= \langle \Psi | P_{00} P_{00} | \Psi \rangle \\
&= \frac{1}{4} \left( \langle B_{00}|_{23} \otimes \langle B_{00}|_{14} \right) \left( |B_{00}\rangle_{23} \otimes |B_{00}\rangle_{14} \right) \\
&= \frac{1}{4} \langle B_{00}|_{23}|B_{00}\rangle_{23} \langle B_{00}|_{14}|B_{00}\rangle_{14} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned} \tag{3}$$

**Remarque sur le postulat de la mesure :** Si l'état avant la mesure est  $|\Psi_{\text{in}}\rangle$  et l'état obtenu après la mesure est  $|\Psi_{\text{fin}}\rangle$  la probabilité de cet évènement est

$$|\langle \Psi_{\text{fin}} | \Psi_{\text{in}} \rangle|^2$$

Cette probabilité est égale à  $\langle \Psi_{\text{fin}} | \Psi_{\text{in}} \rangle \langle \Psi_{\text{in}} | \Psi_{\text{fin}} \rangle$ . Posant  $P_{\text{fin}} = |\Psi_{\text{fin}}\rangle \langle \Psi_{\text{fin}}|$  qui le projecteur sur l'état final on trouve que la probabilité peut aussi s'écrire

$$\langle \Psi_{\text{in}} | P_{\text{fin}} | \Psi_{\text{in}} \rangle$$

Et aussi puisque  $P_{\text{fin}}^2 = P_{\text{fin}}$  pour un projecteur cette probabilité est aussi égale à

$$\langle \Psi_{\text{in}} | P_{\text{fin}} P_{\text{fin}} | \Psi_{\text{in}} \rangle$$

Grâce à cette formula on trouve que la probabilité plus haut est  $1/4$  sans faire de calculs !