Traitement Quantique de l'Information

Homework 10

Problème 1: Dynamique du spin.

On considère un spin 1/2 dont la dynamique est décrite par un Hamiltonien de la forme

$$H = \frac{\hbar\delta}{2}\sigma_z - \frac{\hbar\omega_1}{2}\sigma_x$$

où $\hbar$ est la constante de Planck, δ et $\omega_1 \in \mathbb{R}$ et les deux matrices de Pauli $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Voir le cours pour l'interprétation physique de cet Hamiltonien.

On rappelle la formule:

$$\exp\left(\frac{a}{2}\,\mathbf{n}\cdot\vec{\sigma}\right) = (\cos\frac{a}{2})I + i(\sin\frac{a}{2})\mathbf{n}\cdot\vec{\sigma}$$

avec $a \in \mathbb{R}$ et $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ un vecteur unité, $\mathbf{n}\cdot\vec{\sigma} = n_x\sigma_x + n_y\sigma_y + n_z\sigma_z$, et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Calculez l'opérateur d'évolution

$$U(t,0) = \exp\left(-i\frac{t}{\hbar}H\right)$$

et exprimez le sous forme matricielle et aussi en notation de Dirac avec la convention $|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) Considérez le cas $\omega_1 << \delta$ et l'état initial en $t = 0$ est $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$.

- Calculez une bonne approximation de l'état final au temps t (pour cela considérez la limite $\omega_1 \to 0$ et δ fixe).
- Représentez la trajectoire sur la sphère de Bloch dans cette limite.
- Est-elle périodique ? Si oui quelle est la période ?

(c) Considérez le cas $\delta << \omega_1$ et l'état initial en $t = 0$ est $|\uparrow\rangle$.

- Calculez une bonne approximation de l'état final au temps t (pour cela considérez la limite $\delta \to 0$ et ω_1 fixe).
- Représentez la trajectoire sur la sphère de Bloch dans cette limite.
- Est-elle périodique ? Si oui quelle est la période ?