Traitement Quantique de l'Information

Solution Homework 10

Problème 1: Dynamique du spin.

(a) La matrice d'évolution temporelle est donné par (ici la notation $U(t,0)$ signifie l'évolution de l'instant 0 jusqu'à l'instant t)

$$\begin{aligned} U(t,0) &= \exp\Big(-i\frac{t\delta}{2}\sigma_z + i\frac{t\omega_1}{2}\sigma_x\Big) \\ &= \exp\Big(\frac{a}{2}(n_x\sigma_x + n_z\sigma_z\Big) \end{aligned}$$

avec $a = t(\delta^2+\omega_1^2)^{1/2}$ et $n_x = \frac{\omega_1}{(\delta^2+\omega_1^2)^{1/2}}$, $n_z = \frac{\delta}{(\delta^2+\omega_1^2)^{1/2}}$. Donc en appliquant la formule "d'Euler généralisée",

$$U(t,0) = \cos\bigg(\frac{t}{2}(\delta^2+\omega_1^2)^{1/2}\bigg)I + i\sin\bigg(\frac{t}{2}(\delta^2+\omega_1^2)^{1/2}\bigg)\Big(\frac{\omega_1}{(\delta^2+\omega_1^2)^{1/2}}\sigma_x + \frac{\delta}{(\delta^2+\omega_1^2)^{1/2}}\sigma_z\Big)$$

Ceci donne la matrice finale:

$$U(t,0) = \begin{bmatrix} \cos\big(\frac{t}{2}(\delta^2+\omega_1^2)^{1/2}\big) + i\delta\frac{\sin\left(\frac{t}{2}(\delta^2+\omega_1^2)^{1/2}\right)}{(\delta^2+\omega_1^2)^{1/2}} & i\omega_1\frac{\sin\left(\frac{t}{2}(\delta^2+\omega_1^2)^{1/2}\right)}{(\delta^2+\omega_1^2)^{1/2}} \\ i\omega_1\frac{\sin\left(\frac{t}{2}(\delta^2+\omega_1^2)^{1/2}\right)}{(\delta^2+\omega_1^2)^{1/2}} & \cos\big(\frac{t}{2}(\delta^2+\omega_1^2)^{1/2}\big) - i\delta\frac{\sin\left(\frac{t}{2}(\delta^2+\omega_1^2)^{1/2}\right)}{(\delta^2+\omega_1^2)^{1/2}} \end{bmatrix}$$

(b) Dans la limite $\omega_1 << \delta$ on obtient

$$U(t,0) = \begin{bmatrix} \cos\big(\frac{t\delta}{2}\big) + i\sin\big(\frac{t\delta}{2}\big) & 0 \\ 0 & \cos\big(\frac{t\delta}{2}\big) - i\sin\big(\frac{t\delta}{2}\big) \end{bmatrix}$$

Si l'état initial est $\frac{1}{2}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$ alors l'état final est

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{it\delta/2}|\uparrow\rangle + e^{-it\delta/2}|\downarrow\rangle = \frac{e^{-it\delta/2}}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + e^{-it\delta}|\downarrow\rangle$$

<u>*Trajectoire*: Sur la sphère de Bloch il faut dessiner une trajectoire tournante le long de l'équateur</u> (car avec la paramétrisation de la sphère de Bloch $\theta = \pi/2$ et $\varphi = -t\delta$). Celle-ci est périodique de période $T = \frac{2\pi}{\delta}$.

Dans le référentiel tournant l'état n'est (approximativement) pas affecté par le champ tournant (situation de detuning extrême).

(c) Dans la limite $\delta << \omega_1$ on obtient

$$U(t,0) = \begin{bmatrix} \cos\big(\frac{\omega_1 t}{2}\big) & i\sin\big(\frac{\omega_1 t}{2}\big) \\ i\sin\big(\frac{\omega_1 t}{2}\big) & \cos\big(\frac{\omega_1 t}{2}\big) \end{bmatrix}$$

Si l'état initial est $|\uparrow\rangle$ alors l'état final est

$$U(t,0)|\uparrow\rangle = \cos\left(\frac{\omega_1 t}{2}\right)|\uparrow\rangle + i\sin\left(\frac{\omega_1 t}{2}\right)|\downarrow\rangle$$

Trajectoire: Sur la sphère de Bloch on dessine une trajectoire tournante autour de l'axe x dans la plan (yz) (car avec la paramétrisation de la sphère de Bloch $\theta = \omega_1 t$ et $\varphi = \pi/2$). Celle-ci est périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega_1}$: en effet cette période correspond bien à la paramétrisation $\theta = \omega_1 t$.

Remarquons qu'ici en une période la matrice d'évolution unitaire change de signe mais ce signe donne une phase globale à l'état final et donc inobservable au niveau des probabilités des mesures.

Dans le référentiel tournant ceci correspond à des spins flips dans une situation de tuning.