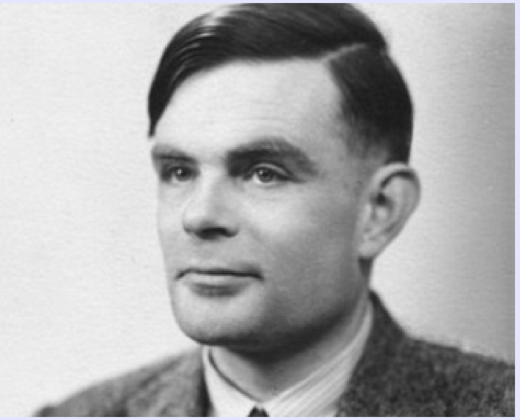
Ada Lovelace



Alan Turing

Grace Hopper

Information, Calcul et Communication

Module 1 : Calcul

Leçon I.2 : Qu’est-ce qu’un algorithmes ?

J.-C. Chappelier, J. Sam (slides) & R. Guerraoui (livre chap1)

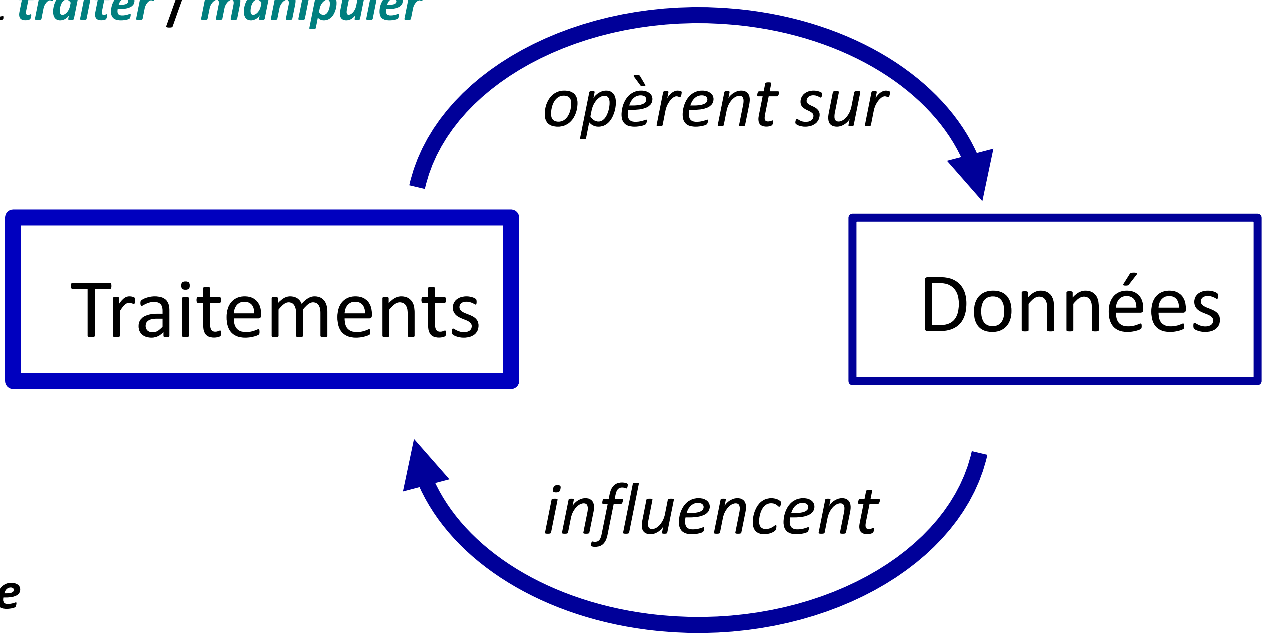
EPFL

Objectifs de la leçon

Dans la leçon précédente, nous avons vu comment représenter les éléments d’un problème sous forme de **données** de différents *types* (nombres entiers, nombres à virgule flottante, caractères alphanumériques, etc…).

Une question est maintenant de savoir comment ***traiter*** / ***manipuler*** toutes ces **données**.

☞ C’est tout l’objet du **calcul** informatique.



Les objectifs de cette leçon sont de :

- Formaliser ces calculs : notion ***d’algorithme***
- Présenter les «***composants***» des algorithmes
- Les illustrer sur la résolutions de quelques problèmes simples en partie inspirés par le cours précédent

Plan

- Formaliser ces calculs : notion d’algorithme
- Présenter les « ingrédients de base » des algorithmes
- Illustrations sur quelques d’algorithmes

Qu’est ce qu’un algorithme ?

Algorithme ?

☞ moyen pour un humain de représenter la résolution par calcul d’un **problème** pour un autre humain ou pour une machine.

Les algorithmes existent depuis bien avant les ordinateurs :

Déjà dans l’Antiquité (e.g. *multiplication égyptienne, algorithme d’Euclide du PGCD*)

Origine du nom :

Mathématicien persan Al-Khawarizmi du 9e siècle, surnommé « le père de l’algèbre ».

Formalisation de l'Informatique

Formalisation des traitements : algorithmes

☞ distinguer formellement les bonnes séquences de traitements des mauvaises

Formalisation des (ensembles de) données : structures de données

☞ Distinguer formellement les bonnes structuration des données des mauvaises. Cependant cet aspect est peu développé dans ce cours.

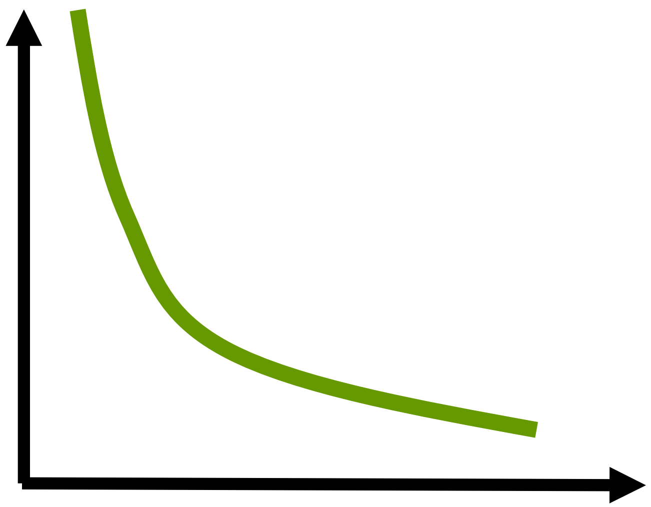
☞ Nous travaillerons essentiellement avec des variables et la notion de **liste:**

Une **liste** = un ***ensemble de données de taille connue N***.
On accède à un élément de la liste **L** à l'aide d'un *numéro de* ***1 à N***, appelé **indice.**
Dans nos exemples on utilise les notations **L(i)** ou **L[i]** pour désigner le **i**ème élément de la liste **L**.

La conception consiste à choisir les **bons algorithmes**
et les **bonnes structures de données**
pour résoudre un problème

Compromis fréquent entre *le **coût calcul*** de l'algorithme et *le **coût mémoire*** de la structure de donnée

Coût calcul de l'algorithme = nb d'opérations pour obtenir le résultat



Coût mémoire de la structure de donnée
= espace mémoire nécessaire
pour les données fournies en input,
le résultat *ET les calculs intermédiaires*

Idéalement, si la mémoire était infinie et facile d'accès, de nombreux problèmes pourraient se mettre sous forme d'une table qu'il suffirait de consulter pour chaque combinaison des paramètres du problème fournie en entrée.

Algorithme ≠ Programme

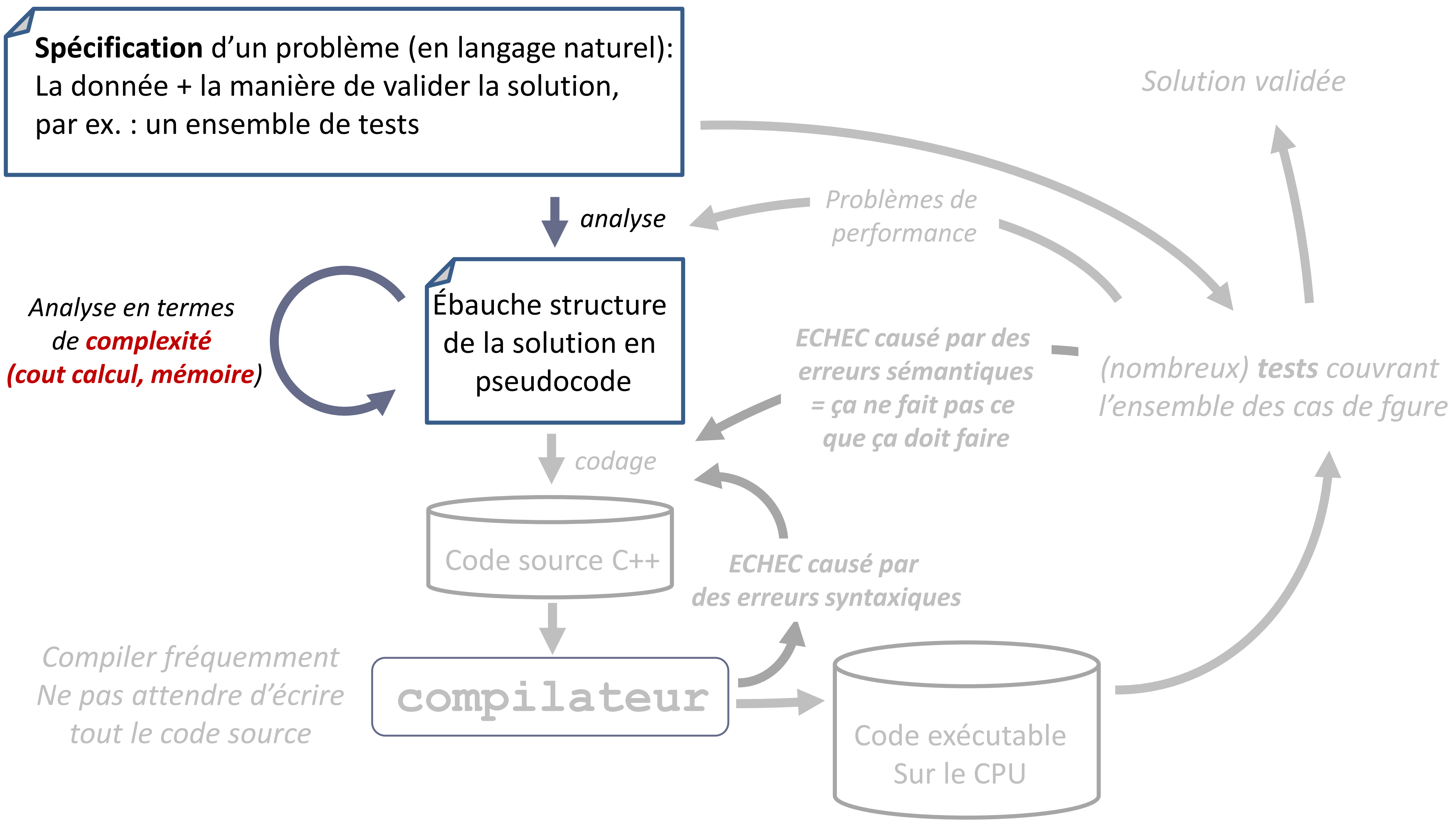
Un algorithme est **indépendant du langage de programmation** dans lequel on va l'exprimer **et de l'ordinateur** utilisé pour le faire tourner.

C'est une description *abstraite* des étapes conduisant à la solution d'un problème.

algorithme = partie conceptuelle d'un programme (indépendante du langage)

programme = implémentation (réalisation) de l'**algorithme**, dans un langage de programmation et sur un système particulier.

Rappel: cycle de développement

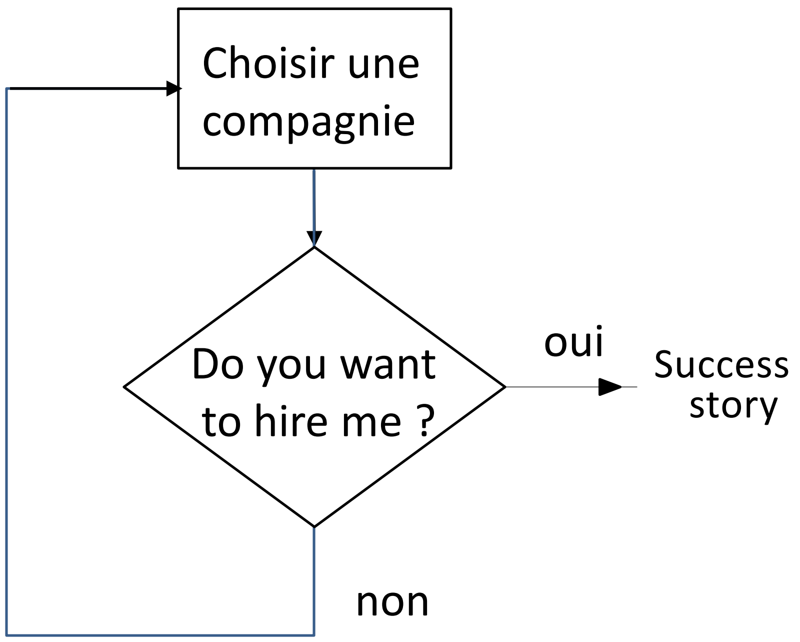


Algorithmes : introduction

☞ algorithme(s) / données ?..

Algorithmes : introduction

« Do you want to hire me ? » : premier algorithme :



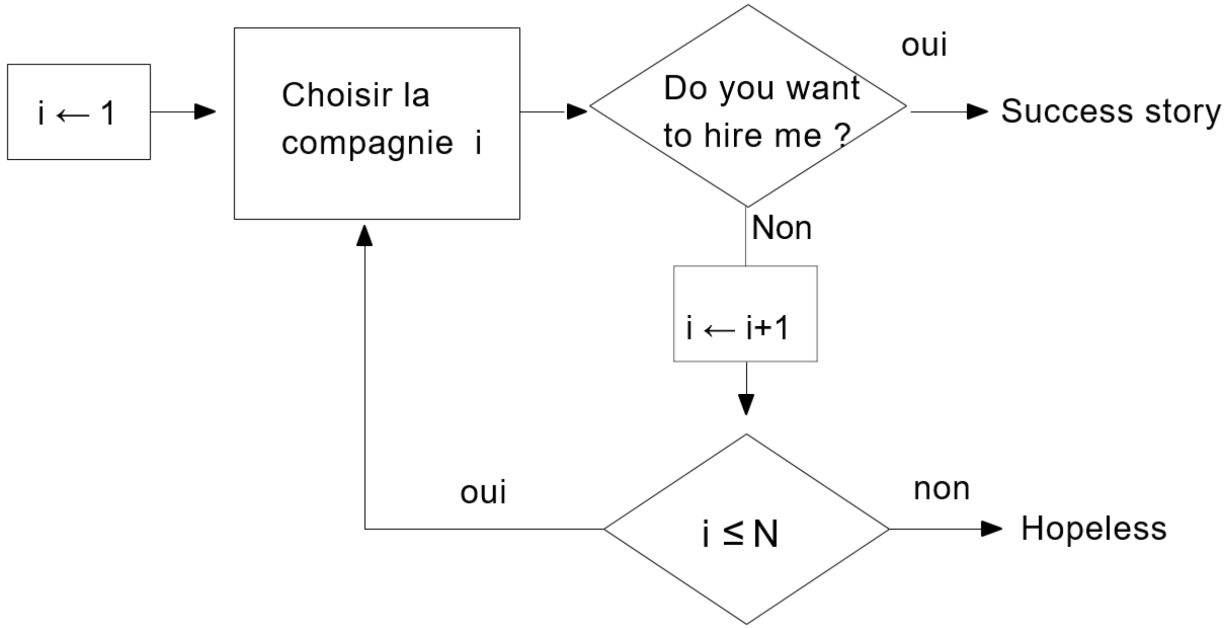
Données :
- Une personne cherchant un stage
- Ensemble de *N* compagnies

Remarque :
- Cette représentation graphique du flot de contrôle de l’algorithme s’appelle un ***organigramme***

☞ Il n’est pas garanti que l’algorithme puisse se terminer !

Algorithmes : introduction

«Do you want to hire me ? » : deuxième algorithme :



L'algorithme se **termine** nécessairement
(au pire *N* essais successifs)

Données :

- Une personne cherchant un stage
- Ensemble ***ordonné*** de N compagnies
  - Les données sont *structurées* ; chaque compagnie a un numéro entre 1 et N
- Une variable **i** est utilisée pour compter les compagnies

Qu'est ce qu'un algorithme ?

Algorithme :

composition d'un ensemble **fini** d'opérations élémentaires bien définies (**déterministes**)

opérant sur un nombre **fini** de données

et effectuant un traitement bien défini :

- suite **finie** de règles à appliquer,
- dans un ordre déterminé,
- si possible, **se terminant** (i.e. arriver, en un nombre **fini** d'étapes, à un résultat, et cela quelles que soient les données traitées).

Plan

- Formaliser ces calculs : notion d'algorithme
- Présenter les « ingrédients de base » des algorithmes
- Illustrations sur quelques d'algorithmes

Terminologie

Un algorithme travaille sur des données qu'il utilise et/ou modifie.

☞ il doit **mémoriser** ces données, en les associant à un *nom* / *identificateur* pertinent pour pouvoir les retrouver au moment où elles lui sont nécessaires.

Une donnée nommée est ce que l'on appelle une ***variable*** dans un algorithme.

Opérateurs élémentaires

donnée nommée (variable) → delta ← b^2 - 4*a*c

opérandes

delta ← b^2 - 4*a*c

Expressions

Les **traitements** combinent une ou plusieurs **opérations** dans des **expressions**

L' **expression** correspondant à un pas de l'algorithme est appelée une **instruction**

Instruction (non-) élémentaire

Une ***instruction élémentaire*** est une instruction dont le coût d’exécution est **constant** (ne dépend pas de la donnée que l’on manipule).

Exemples :

- ***instruction élémentaire d’affectation***:

  associer le résultat d’une expression à un nom (variable)

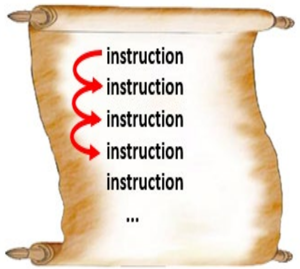
  delta ← b^2 - 4*a*c

- ***instruction élémentaire d’affichage*** : utiliser le verbe **afficher**

  écrire la valeur d’une donnée, une variable ou expression dans le terminal

- ***instruction non élémentaire*** : compter le nombre de caractères contenus dans une phrase (dépend de la longueur de la phrase).

Structures de contrôle

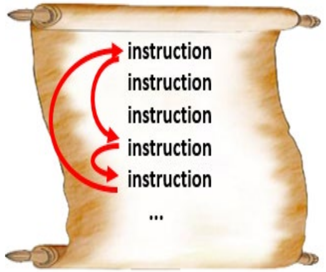


Une séquence linéaire d’instructions ne permet pas d’exprimer un traitement complexe des données (ex: conditionnel, répétitif).

☞ **structures de contrôle**

Une structure de contrôle sert à **modifier l’ordre séquentiel d’exécution** d’un programme (elle peut produire un *branchement* sur une instruction qui n’est pas celle qui suit dans l’algorithme)

☞ faire exécuter à la machine des tâches de façon *répétitive*, ou *en fonction de certaines conditions* (ou les deux).



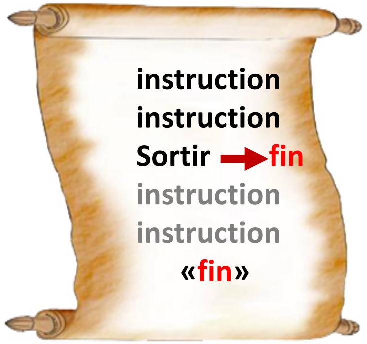
Les 4 différentes structures de contrôle

1) la sortie = fin de l’algorithme: *Sortir : résultat (optionnel)*

La sortie *implicite* d’un algorithme est à la **fin** de la suite d’instructions.

Il est possible d’insérer une instruction de sortie de l’algorithme *explicitement* dans la suite d’instructions.

Si l’instruction de sortie n’est pas la dernière de l’algorithme, elle doit être associée à une condition sinon l’arrêt de l’algorithme est inconditionnel et ce qui suit n’est jamais exécuté.



La sortie *peut produire un* ***résultat*** mais ça n’est pas obligatoire.

Le *résultat* fourni en sortie peut être utilisé dans un autre algorithme

En général on associe l’instruction **sortir** à l’une des 3 autres structures de contrôle qui permettent de mettre en œuvre une action conditionnelle

Les 4 différentes structures de contrôle (2)

Ex: affichage de la parité d'un entier positif **n** .

L'opérateur **mod** calcule le *reste dans la division entière* de l'opérande gauche par l'opérande droit

2) les branchements conditionnels : *Si* ... *Alors* ... *Sinon* ...

```
Si  (n mod 2) = 0  Alors

        afficher : ce nombre est pair

Sinon

        afficher : ce nombre est impair
```

Le mot-clef *Si* est suivi d'une expression de type «**condition**» dont la valeur ne peut être que Vrai ou Faux (booléen)

On indique la ou les instructions contrôlées avec un décalage vers la droite = une *indentation*

variante avec l'instruction *Sortir* ; le mot-clef *Sinon* devient inutile

```
Si  (n mod 2) = 0  Alors

        afficher : ce nombre est pair
        Sortir

Afficher : ce nombre est impair
```

→ Fin de l'algorithme si la condition est Vraie

→ Suite de l'algorithme si la condition est Fausse

Les 4 différentes structures de contrôle (3)

3) les boucles conditionnelles :

Tant que ... , ***Répéter ... Tant que...***

Le mot-clef ***Tant que*** est suivi d'une expression de type «**condition**» dont la valeur ne peut être que Vrai ou Faux (booléen)

```
 lire un nombre entier n
 k ← 0
Tant que  n > 1
      n ← n / 2        //div entière
      k ← k + 1

sortir k
```

```
Répéter
     demander une valeur positive
     lire une valeur
Tant que   la valeur n'est pas positive

… suite de l'algo …
```

On exécute au moins une fois les instructions de la boucle

4) les itérations : *Pour … allant de … à …*

Lorsquon connaît le nombre de répétitions on privilégie l'usage de la boucle ***Pour***

$$x = \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{i^2}$$

$x \leftarrow 0$
Pour ***i*** de 1 à 5
  $x \leftarrow x + \frac{1}{i^2}$
sortir x

Implicitement on considére que la variable **i** qui contrôle la boucle ***Pour*** est :

- Initialisée à la première valeur, ici **1**
- Testée systématiquement vis-à-vis de **5** pour décider si on entre dans la boucle ou pas
- ***Incrémentée d'une unité*** après l'exécution de l'instruction contrôlée

<u>Exécution</u>: Valeur initiale de x ¦ valeur de i ¦ valeur de x après exécution de linstruction contrôlée

On peut toujours faire des **itérations** en utilisant des **boucles conditionnelles**:

$$x = \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{i^2}$$

$x \leftarrow 0$
Pour ***i*** de 1 à 5
  $x \leftarrow x + \frac{1}{i^2}$
sortir x

$x \leftarrow 0$
$i \leftarrow 1$
Tant que $\boldsymbol{i \leq 5}$
  $x \leftarrow x + \frac{1}{i^2}$
  $i \leftarrow i + 1$
sortir x

Algorithmes : conclusion

On attend d’un algorithme qu’il se <u>termine</u>, produise le résultat correct (propriété de <u>sûreté</u>) *pour toute entrée*.

Difficulté de l’Informatique (science) :
assurer que l’algorithme est correct *pour toute entrée*.

On ne peut pas vérifier par des essais (empirisme) : on ne pourra jamais tester tous les cas

Mais il est possible d’organiser les tests de façon
à couvrir de nombreux scénarios d’utilisations

Recherche en informatique: ☞ vérification par preuves mathématiques

Importance d’un travail soigneux et mûrement réfléchi !

Plan

- Formaliser ces calculs : notion d'algorithme
- Présenter les « ingrédients de base » des algorithmes
- Illustrations sur quelques algorithmes
  - Conversion représentation en virgule fixe vers décimal
  - Conversion base dix vers le binaire (nb entier)
  - Conversion base dix vers le binaire ($0 \leq nb < 1$)
  - Conversion représentation simple en virgule flottante vers décimal
  - Conversion base dix vers représentation simple en virgule flottante

Ex : Conversion virgule fixe vers décimal

Donnée : Convertir un nombre binaire en virgule fixe représenté par une liste **P** de 32 valeurs binaires dont **nf** sont dédiés à la partie fractionnaire.

La boucle traite les éléments de P en commençant par le poids faible mémorisé dans **P(1).**

C'est pour quoi on initialise le terme B représentant la plus faible puissance de 2 avec la valeur du poids faible $\mathbf{2^{-nf}}$

Pour chaque élément suivant de la liste P, on augmente la puissance de la base de une unité, ce qui revient à multiplier B par un facteur 2.

Conversion_entier_bin2dec
entrée : *nb de bits en partie fractionnaire **nf*** *liste P de 32 valeurs 0 ou 1* sortie : *valeur représentée X*

$X \leftarrow 0$
$B \leftarrow 2\wedge(-nf)$
Pour i de 1 à 32
    $X \leftarrow X + P(i) * B$
    $B \leftarrow 2 * B$
Sortir X

Ex2: Conversion d’un nombre entier décimal vers le binaire

Donnée : Convertir un entier positif décimal n en binaire jusqu’à un maximum de 32 bits. La conversion consiste à effectuer la division entière par la base 2 tant que le quotient est supérieur ou égal à la base. A chaque étape, ***le reste** de la division entière* fournit le *poids d’une puissance de la base* en commençant par le poids faible. On obtient ce *reste* avec L’opérateur **mod** .

Question: L’affichage immédiat des poids donne-t-il le bon résultat ?

Réponse: Non car le nombre binaire apparaît «à l’envers». On doit ranger chaque poids binaire dans un élément d’une liste **P** de 32 éléments binaires tel le poids de la puissance i-1 de 2 est mémorisé dans l’élément P(i) de la liste P.

Dans une seconde étape on affiche les éléments mémorisés dans P en commençant par les poids fort.

Remarque: le pas est implicitement de **-1** pour k

Conversion_entier_dec2bin

entrée : *n, entier naturel*
P, liste de 32 valeurs 0 ou 1
sortie : *aucune car l’algo affiche la valeur binaire de n ou un message d’erreur*

```
i ← 1
Répéter
    P(i) = n mod 2
    n ← n / 2
    i ← i + 1
Tant que  n ≠ 0   et   i ≤ 32

Si  n ≠ 0   et  i > 32
    Afficher : n est trop grand
Sinon
    Pour k de (i -1) à 1
        afficher : P(k)
```

Ex3: Conversion décimal vers binaire : $0 \leq a < 1$

Donnée : Convertir un nombre fractionnaire positif décimal **a** en binaire jusqu'à un maximum de 32 bits.

La conversion consiste à une multiplication de la partie fractionnaire par la base 2 tant qu'elle n'est pas nulle. A chaque étape, la partie entière est le poids d'une puissance de la base. L'algorithme produit le poids fort en premier. De ce fait on peut procéder à l'affichage immédiatement, sans passer par une mémorisation des bits.

Illustration: supposons que **a** ait cette représentation binaire: $0.b_w b_x b_y b_z$ où chaque lettre *b* désigne la valeur d'un bit, 0 ou 1.

Si ce motif binaire est multiplié par 2, il se décale d'un cran vers la gauche: supposons X = $b_w.b_x b_y b_z$

La partie entière notée **PartieEntière(X)** donne b_w
L'algorithme continue avec 0. $b_x b_y b_z$

Conversion_fract_dec2bin
entrée : *a, dans l'intervalle [0, 1[* sortie : *aucune car l'algo affiche la valeur binaire de a et éventuellement un message d'avertissement*

afficher: 0.
i ← 1
Répéter
    a ← 2*a
    b ← ***PartieEntière***(a)
   afficher : b
    a ← a-b
    i ← i+1
Tant que a > 0 et i ≤ 32
 	
Si i > 32
    Afficher : ce résultat est une approximation

Ex : Conversion virgule flottante vers décimal

Donnée : Convertir la valeur binaire d'une liste F contenant 4 valeurs binaires pour la représentation en virgule flottante du cours M1.L1 slides 36-37.

Comme indiqué sur le dessin à droite:

- F(4) et F(3) sont respectivement les poids des puissances 1 et 0 de l'exposant.
- F(2) et F(1) sont respectivement les poids des puissances -1 et -2 de la mantisse.

Si **l'exposant** a la valeur minimum de **0**, on utilise la **forme dénormalisée**:

$$\mathbf{X = 2^1 * 0{,}mantisse}$$

sinon la **forme normalisée**.

$$\mathbf{X = 2^{exposant} * 1{,}mantisse}$$

Conversion_virgule_flottante_vers_dec
entrée : *liste F de 4 valeur binaires* sortie : *la quantité représentée X*

exposant ← 2*F(4) + F(3)
mantisse ← 0.5*F(2) + 0.25*F(1)
 	
Si exposant = 0
    // forme dénormalisée
    Sortir : 2 * mantisse
Sinon
    // forme normalisée
    Sortir : 2^exposant * (1+mantisse)

Liste F :

F(4)	F(3)	F(2)	F(1)
2^1	2^0	2^{-1}	2^{-2}

$\underbrace{2^1 \quad 2^0}_{\text{exposant}} \quad \underbrace{2^{-1} \quad 2^{-2}}_{\text{mantisse}}$

Ex : Conversion décimal vers virgule flottante

Donnée : Convertir la valeur décimale positive X comprise dans l’intervalle [0, 16[vers la représentation de l’exemple simple du cours M1.L1.3 slides 11-12. On utilise la liste F pour stocker le résultat (dessin).

Liste F :

F(4)	F(3)	F(2)	F(1)
2^1	2^0	2^{-1}	2^{-2}
exposant		mantisse	

Méthode:
1.1) on doit distinguer le cas particulier des nombres associés à la forme **dénormalisée** (M1 L1.3 slide 12). Il s’agit des nombres qui sont dans l’intervalle **[0, 2^1[** .
Pour ces nombres, **l’exposant** prend la valeur **0** et on pose **p=1** pour l’étape 2) de la méthode.

1.2) Pour les autres nombre dans l’intervalle **[2, 16[,** on calcule **p =** ***PartieEntière(log_2(X))*** pour trouver dans quelle plage de puissance de 2 se trouve X.
Pour ces nombres, **l’exposant** est la conversion de **p** en binaire.

2) On obtient la **mantisse** en convertissant en binaire la **partie fractionnaire** de **v = X/2^p .**
Pour la forme dénormalisée, **v** est dans l’intervalle] 0, 1[
Pour la forme normalisée, **v** est dans l’intervalle [1, 2[.

Ex : Conversion décimal vers virgule flottante

Conversion_dec_vers_vflottante

entrée : la quantité décimale X dans l’intervalle [0, 16[
sortie : la liste F du motif binaire du cours M1.L1.3

Si X = 0 // zéro est représenté
    Sortir : F ← {0, 0, 0, 0} // par le motif binaire nul
Sinon Si X < 2^1 // forme dénormalisée
    p ← 1, F(4) ← 0, F(3) ← 0
Sinon // forme normalisée
    p ← ***PartieEntière(log₂(*** X ***))***
    Convertir l’entier p en binaire
    Ranger le motif binaire du résultat dans F(4) et F(3)

v ← X / 2^p //division sur les réels
m ← v-***PartieEntière(*** v ***)*** // obtient la partie fractionnaire

Convertir la partie fractionnaire m en binaire
Ranger le motif binaire du résultat dans F(2) et F(1)

Sortir: F

F(4)	F(3)	F(2)	F(1)
2^1	2^0	2^{-1}	2^{-2}
exposant		mantisse	

Ce que j'ai appris aujourd'hui

Dans cette leçon, vous avez

- appris ce qu'est un **algorithme** et ses principaux constituants
  - Expressions
  - Structures de contrôle
    - ***Si alors Sinon,***
    - ***Tant que,***
      - ***Répéter …. Tant que***
      - ***Pour i de ..à ..***
    - ***Sortir***

☞ ***Vous pouvez maintenant :***

- construire des algorithmes simples pour des problèmes simples

La suite

La prochaine leçon présentera :

- la notion de ***complexité*** d'un algorithme
- Deux grandes famille d'algorithmes: la **recherche** et le **tri**
- La *stratégie descendante (top-down)* de conception