# Examen Final

**Nom:** ......................... **Prénom:** ....................... **Section et sciper no:** ..........................

- Vous pouvez répondre aux questions en Francais ou en Anglais.
- Ecrivez votre nom sur chaque feuille double, rendez la donnée et tous les brouillons SVP.
- Durée: 12h15-15h15.
- Vous avez droit à votre résumé personnel.

**Problème 1: Distribution imparfaite de clé secrète**

On considère un protocole de Bennett-Brassard (1984) quand Bob possède des bases de mesures qui ne sont *pas* parfaitement alignées avec les bases d'encodage d'Alice.

- Alice génère deux suites aléatoires $x_1 \dots x_N$ avec $P(x_i = 0) = P(x_i = 1) = 1/2$ et $e_1 \dots e_N$ avec $P(e_i = 0) = P(e_i = 1) = 1/2$.

  – Si $e_i = 0$ elle encode le $i$-ème qubit dans l'état $|x_i\rangle$.

  – Si $e_i = 1$ elle encode le $i$-ème qubit dans l'état $H\,|x_i\rangle$, où $H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est la matrice de Hadamard.

- Bob génère une suite aléatoire $d_1 \dots d_N$ avec $P(d_i = 0) = P(d_i = 1) = 1/2$.

  – Si $d_i = 0$, il mesure le qubit recu dans la base

$$|\alpha\rangle = \cos\alpha|0\rangle + \sin\alpha|1\rangle, \quad |\alpha_\perp\rangle = -\sin\alpha|0\rangle + \cos\alpha|1\rangle$$

  et enregistre $y_i = 0$ (respectivement $y_i = 1$) si le résultat de la mesure est $|\alpha\rangle$ (respectivement $|\alpha_\perp\rangle$).

  – Si $d_i = 1$, il mesure le qubit recu dans la base

$$H|\alpha\rangle = \cos\alpha H|0\rangle + \sin\alpha H|1\rangle, \quad H|\alpha_\perp\rangle = -\sin\alpha H|0\rangle + \cos\alpha H|1\rangle$$

  et enregistre $y_i = 0$ (respectivement $y_i = 1$) si le résultat de la mesure est $H|\alpha\rangle$ (respectivement $H|\alpha_\perp\rangle$).

**(a)** Calculez les probabilités $P(x_i = y_i | e_i = d_i = 0)$ and $P(x_i = y_i | e_i = d_i = 1)$.

*Indication facultative*: Pour tout évènement $A$ on a:

$$P(x_i = y_i|A) = P(x_i = y_i = 0|A, x_i = 0)P(x_i = 0) + P(x_i = y_i = 1|A, x_i = 1)P(x_i = 1)$$

**(b)** Déduisez la probabilité $P(x_i = y_i | e_i = d_i)$. Que trouvez vous pour $\alpha = 0$? pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$? et pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$?

**Problème 2: Codage superdense imparfait.**

Alice est sur la lune et Bob est seul sur Mars. Ils partagent une paire de photons dans l'état

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\big(|0\rangle \otimes |0\rangle + |0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle\big)$$

Alice possède le *premier* photon et Bob possède le *second* photon. Ils pensent que leur paire est en fait dans l'état de Bell et vont donc utiliser le protocole du codage superdense *usuel.*

**(a)** Question préliminaire: Démontrez que la paire dans l'état $|\Psi\rangle$ est intriquée.

**(b)** Pour envoyer un message $xy$ où $x \in \{0, 1\}$ et $y \in \{0, 1\}$ à Bob, Alice utilise le protocole d'encodage usuel. Nous rappelons que:

- pour envoyer 00 elle envoie tout simplement *son* photon à Bob;
- pour envoyer 01 elle effectue l'opération unitaire $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur *son* photon puis l'envoie à Bob;
- pour envoyer 10 elle effectue l'opération unitaire $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sur *son* photon puis l'envoie à Bob;
- pour envoyer 11 elle effectue l'opération unitaire $iY = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ sur *son* photon puis l'envoie à Bob.

Calculez les 4 états possibles de la paire quand Bob recoit le photon d'Alice.

**(c)** Supposons concrètement qu'Alice a envoyé le message 10 à Bob. Lorsque Bob possède les deux photons de la paire, il utilise le protocole de décodage *usuel*: Il effectue donc une mesure dans la base de Bell. Nous rappelons que cette base est constituée des 4 états

$$\begin{aligned}
|B_{00}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle), \\
|B_{01}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle), \\
|B_{10}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle), \\
|B_{11}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle).
\end{aligned}$$

Quels sont les messages possibles observés par Bob et quelles sont leurs probabilités respectives? Calculez aussi la probabilité d'une erreur de transmission.

**Problème 3: Dynamique du spin.**

Soit $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ avec

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

les trois matrices de Pauli. Soit $\hat{n} = (n_x, n_y, n_z)$ un vecteur de norme unité. Soit

$$R(\theta, \hat{n}) = \exp\left(i\frac{\theta}{2}\vec{\sigma}\cdot\hat{n}\right) = \left(\cos\frac{\theta}{2}\right) I + i\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)\vec{\sigma}\cdot\hat{n},$$

où $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{\sigma}\cdot\hat{n} = \sigma_x n_x + \sigma_y n_y + \sigma_z n_z$. On rappelle que $R(\theta, \hat{n})$ peut être représentée sur la sphère de Bloch comme une rotation (d'angle $\theta$ et d'axe $\hat{n}$ un vecteur de norme unité) agissant sur le vecteur représentant l'état du spin.

**(a)** Considérez deux spins nucléaires (en interaction) avec l'hamiltonien

$$H = \hbar J \sigma_z^{(1)} \otimes \sigma_z^{(2)}$$

(Ici $\hbar$ est la constante de Planck et $J$ est une constante de couplage réelle).

Calculez $\exp\left(-i\frac{t}{\hbar}H\right)$ et donnez le résultat en notation de Dirac.

**(b)** Soit $\hat{x} = (1, 0, 0)$ et $\hat{y} = (0, 1, 0)$. Calculez l'état $U_t\left|\uparrow\right\rangle \otimes \left|\uparrow\right\rangle$ pour

$$U_t = R\left(\frac{\pi}{2}, \hat{x}\right) \otimes R\left(\frac{\pi}{2}, \hat{x}\right) \exp\left(-i\frac{t}{\hbar}H\right) I \otimes R\left(\frac{\pi}{2}, \hat{y}\right)$$

**(c)** L'état résultant est-il intriqué ou produit? Est-ce que cela dépend de $t$? Justifiez.