Traitement Quantique de l'Information **Lundi 28 Janvier 2019**

Examen final - Salle INM 200 - 8h15 à 11h15

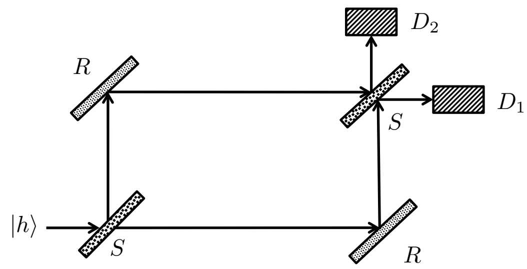
Nom: .... **Prénom:** .... **Section:** ....

- Vous pouvez répondre aux questions en Francais ou en Anglais.
- Ecrivez votre nom sur chaque feuille double, rendez la donnée et tous les brouillons SVP.
- Les formules suivantes de trigonométrie peuvent être utiles:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1, \quad \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos(2\alpha), \quad 2\cos\alpha\sin\alpha = \sin(2\alpha).$$

- Vous avez le droit de faire les calculs en notation de Dirac ou en composantes si vous préférez (on prend tout ce qui est juste).

Problème 1: Interféromètre avec mirroirs semi-transparents imparfaits et réfléchissants parfaits. (30 points)



On considère un interféromètre constitué de deux miroirs semi-transparents et deux miroirs réfléchissants. L'espace d'Hilbert du photon est

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 = \left\{ |\Psi\rangle = \alpha\,|h\rangle + \beta\,|v\rangle\,, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}$$

avec $|h\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $|v\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le photon entrant sur la gauche est dans létat $|h\rangle$. Les miroirs semi-transparents imparfaits sont modélisés par

$$S = \cos\delta\,|h\rangle\langle h| + \sin\delta\,|h\rangle\langle v| + \sin\delta\,|v\rangle\langle h| - \cos\delta\,|v\rangle\langle v| = \begin{pmatrix} \cos\delta & \sin\delta \\ \sin\delta & -\cos\delta \end{pmatrix}$$

Les miroirs parfaitement réfléchissants sont modélisés par:

$$R = |h\rangle\langle v| + |v\rangle\langle h| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Calculez l'état du photon *juste avant* les détecteurs D_1, D_2.

(b) Calculez les probabilités que les détecteurs cliquent $P(D_1)$ et $P(D_2)$.

(c) Que valent ces probabilités pour $\delta = \frac{\pi}{4}$? Pour $\delta = \frac{\pi}{8}$? *Indication*: $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(d) Montrez que S et R sont unitaires.

Problème 2: Un critère d'intrication pour deux bits quantiques. (20 points)

L'état général de deux bits quantiques est de la forme

$$|\Psi\rangle = a_{00}\,|0\rangle \otimes |0\rangle + a_{01}\,|0\rangle \otimes |1\rangle + a_{10}\,|1\rangle \otimes |0\rangle + a_{11}\,|1\rangle \otimes |1\rangle\,,$$

où $\{|0\rangle\,,\ |1\rangle\}$ sont deux vecteurs de la base canonique de $\mathbb{C}^2$.

(a) Montrez que $|\Psi\rangle$ est un état produit *si et seulement si* $\det A = 0$, où A est la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Rappel: $\det A = a_{00}a_{11} - a_{10}a_{01}$.

(b) En utilisant (a) montrez que

$$|\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle + i\,|1\rangle \otimes |0\rangle\right)$$

est un état intriqué. Si vous n'avez pas résolu (a) montrez que c'est un état intriqué "à la main".

Problème 3: Dynamique du spin. (30 points)

On considère deux spins 1/2 (moments magnétiques) qui interagissent via l'Hamiltonien $\mathcal{H} = -\hbar J \sigma_1^x \otimes \sigma_2^z$ où $\sigma_1^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\sigma_2^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sont les matrices de Pauli associées à chaque spin. Ces matrices sont exprimées dans la base $|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On rappelle la propriété suivante du produit tensoriel de matrices:

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$$

où A, B, C, D sont toutes des matrices $n \times n$.

(a) Calculez la matrice d'évolution temporelle $U_t = \exp\left(-\frac{it}{\hbar}\mathcal{H}\right)$. *Rappel*: pour une matrice A on a $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$ et aussi $\cos t = \sum_{k \text{ pair}} \frac{(it)^k}{k!}$ et $i \sin t = \sum_{k \text{ impair}} \frac{(it)^k}{k!}$.

(b) Soit l'état initial $|\Psi_0\rangle = |\downarrow\rangle \otimes (\frac{|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle}{\sqrt{2}})$. Calculez l'état $|\Psi_t\rangle$ à l'instant t.

(c) On fait une mesure du *premier* spin à l'instant t dans la base $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$. Le deuxième spin n'est pas observé. Calculez la probabilité d'obtenir le *premier* spin dans l'état $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$.

Problème 4: Calcul (20 points)

On considère deux spins 1/2 (moments magnétiques) dans l'état de Bell

$$|\mathrm{Bell}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle\Big).$$

Soit les vecteurs

$$|\alpha\rangle = \cos\alpha|\uparrow\rangle + \sin\alpha|\downarrow\rangle, \qquad |\alpha_\perp\rangle = \sin\alpha|\uparrow\rangle - \cos\alpha|\downarrow\rangle$$

et

$$|\beta\rangle = \cos\beta|\uparrow\rangle + \sin\beta|\downarrow\rangle, \qquad |\beta_\perp\rangle = \sin\beta|\uparrow\rangle - \cos\beta|\downarrow\rangle.$$

On considère aussi les deux observables (matrices hermitiennes) suivantes

$$A = |\alpha\rangle\langle\alpha| - |\alpha_\perp\rangle\langle\alpha_\perp|, \qquad B = |\beta\rangle\langle\beta| - |\beta_\perp\rangle\langle\beta_\perp|$$

(a) Quelle est la dimension des vecteurs $|\mathrm{Bell}\rangle$, et $|\alpha\rangle$, $|\alpha_\perp\rangle$, $|\beta\rangle$, $|\beta_\perp\rangle$? Quelles sont les dimensions des matrices A, B et $A \otimes B$.

(b) Calculez la quantité suivante (qui intervient dans les inégalités de Bell)

$$F(\alpha, \beta) = \langle\mathrm{Bell}|A \otimes B|\mathrm{Bell}\rangle.$$

pour toutes valeurs des angles (α, β). Que trouve-t-on dans le cas particulier $\alpha = \beta = 0$?