Solution Traitement Quantique

Lundi 28 Janvier 2019
INM 200

8h15 → 11h15.

Problème 1 (30 points) ; Interféromètre avec miroirs semi-transparents imparfaits et réfléchissants parfaits.

(a) (15 points). On doit calculer :

$$SRS|h\rangle = |\psi\rangle$$

$$S|h\rangle = \cos\delta\,|h\rangle + \sin\delta\,|v\rangle$$

$$RS|h\rangle = \cos\delta\,|v\rangle + \sin\delta\,|h\rangle$$

$$SRS\,|h\rangle = \cos\delta\sin\delta\,|h\rangle - \cos^2\delta\,|v\rangle + \sin\delta\cos\delta\,|h\rangle + \sin^2\delta\,|v\rangle$$

$$= 2\cos\delta\sin\delta\,|h\rangle - (\cos^2\delta - \sin^2\delta)\,|v\rangle$$

$$= (\sin 2\delta)\,|h\rangle - (\cos 2\delta)\,|v\rangle.$$

(b) (5 points) D'après le postulat de la mesure ;

$$P(D_1) = (\sin 2\delta)^2 \quad \text{et} \quad P(D_2) = (\cos 2\delta)^2$$

(c) (5 points) Pour $\delta = \frac{\pi}{4}$; $P(D_1) = 1$ et $P(D_2) = 0$

Pour $\delta = \frac{\pi}{8}$; $P(D_1) = P(D_2) = 1/2$.

L'effet des interférences est manifeste dans le premier cas.

(d) (5 points) On vérifie en notation de Dirac ou en composantes $SS^\dagger = S^\dagger S = 1$ et $RR^\dagger = R^\dagger R = 1$. Ici $A^\dagger = A^{T,*} = A$ car les matrices sont réelles.

②

Problème 2 (20 points). Un critère d'intrication pour deux bits quantiques.

(a) (10 points) : (5 + 5 pour chaque sens de l'implication).

• $|\psi\rangle$ produit $\Rightarrow$ $|\psi\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes (\gamma|0\rangle + \delta|1\rangle)$.

$\Rightarrow$ $a_{00} = \alpha\gamma$, $a_{01} = \alpha\delta$, $a_{10} = \beta\gamma$, $a_{11} = \beta\delta$

$\Rightarrow$ $\det\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \alpha\gamma & \alpha\delta \\ \beta\gamma & \beta\delta \end{pmatrix} = \alpha\gamma\beta\delta - \alpha\delta\beta\gamma = 0$

• Si $\det\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix} = a_{00}a_{11} - a_{01}a_{10} = 0$ alors

* si $a_{11} \neq 0$ on a $a_{00} = \dfrac{a_{01}a_{10}}{a_{11}}$. Donc

$$|\psi\rangle = \frac{a_{01}a_{10}}{a_{11}}|00\rangle + a_{01}|01\rangle + a_{10}|10\rangle + a_{11}|11\rangle$$

$\Rightarrow$ $a_{11}|\psi\rangle = a_{01}a_{10}|00\rangle + a_{11}a_{01}|01\rangle + a_{11}a_{10}|10\rangle + a_{11}^2|11\rangle$

$= (a_{01}|0\rangle + a_{11}|1\rangle) \otimes (a_{10}|0\rangle + a_{11}|1\rangle)$.

$\Rightarrow$ $|\psi\rangle$ est un état produit.

* si $a_{11} = 0$ alors $a_{01}a_{10} = 0$ aussi.

* Si $a_{01} = 0$ alors $|\psi\rangle = a_{00}|00\rangle + a_{10}|10\rangle$

$= (a_{00}|0\rangle + a_{10}|1\rangle) \otimes |0\rangle$

* Si $a_{10} = 0$ alors $|\psi\rangle = a_{00}|00\rangle + a_{01}|01\rangle$

$= |0\rangle \otimes (a_{00}|0\rangle + a_{01}|1\rangle)$.

(b) (10 points). Pour $|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|11\rangle + \frac{i}{\sqrt{3}}|10\rangle$

on a $\det\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \neq 0$ donc l'état est intriqué.

Problème 3. (30 points) Dynamique du spin.

(a) (15 points) L'opérateur d'évolution est :

$$U_t = \exp\left(-\frac{it}{\hbar}\mathcal{H}\right) = \exp\left(itJ\,\sigma_1^x \otimes \sigma_2^z\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}(itJ)^k \underbrace{\left(\sigma_1^x \otimes \sigma_2^z\right)^k}_{(\sigma_1^x)^k \otimes (\sigma_2^z)^k}.$$

$$= \underbrace{\sum_{k \text{ pairs}} \frac{(itJ)^k}{k!}}\, \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + \underbrace{\sum_{k \text{ impairs}} \frac{(itJ)^k}{k!}}\, \sigma_1^x \otimes \sigma_2^z.$$

$$= (\cos tJ)\, \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + i(\sin tJ)\, \sigma_1^x \otimes \sigma_2^z.$$

Remarque : $\sigma_1^x \otimes \sigma_2^z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$$\Rightarrow U_t = \left(\begin{array}{cc|cc} \cos tJ & 0 & i\sin tJ & 0 \\ 0 & \cos tJ & 0 & -i\sin tJ \\ \hline i\sin tJ & 0 & \cos tJ & 0 \\ 0 & -i\sin tJ & 0 & \cos tJ \end{array}\right).$$

(4)

(b) (10 points). On a $|\psi_t\rangle = U_t |\psi_0\rangle$ d'après les principes de la MQ. Ainsi:

$$|\psi_t\rangle = (\cos tJ)\, \mathbb{1}\otimes\mathbb{1} |\psi_0\rangle + (i \sin tJ)\, \sigma_1^x \otimes \sigma_2^z |\psi_0\rangle$$

$$= (\cos tJ)\, |\downarrow\rangle \otimes \frac{|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle}{\sqrt{2}} + i \sin tJ\, |\uparrow\rangle \otimes \frac{|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\cos tJ}{\sqrt{2}} |\downarrow\uparrow\rangle - \frac{\cos tJ}{\sqrt{2}} |\downarrow\downarrow\rangle + \frac{i \sin tJ}{\sqrt{2}} |\uparrow\downarrow\rangle + \frac{i \sin tJ}{\sqrt{2}} |\uparrow\uparrow\rangle$$

(c) (5 points). On mesure le premier spin dans la base $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$. L'état est donc projeté aléatoirement par $P_\uparrow = |\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes I$ ou $P_\downarrow = |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \otimes I$. L'état final sera donc de la forme $|\uparrow\rangle \otimes |2\text{ème spin final}\rangle$ ou bien $|\downarrow\rangle \otimes |2\text{ème spin final}\rangle$. Si bien que le premier spin n'est jamais obtenu dans l'état $\frac{|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle}{\sqrt{2}}$.

La probabilité cet événement est donc nulle.

Problème 4 (20 points) Calcul.

(a) (5 points) $\dim(|Bell\rangle) = 4 \times 1$.

$\dim(|\alpha\rangle, |\alpha_\perp\rangle, |\beta\rangle, |\beta_\perp\rangle) = 2 \times 1$.

$\dim(A \text{ ou } B) = 2 \times 2$

$\dim(A \otimes B) = 4 \times 4$.

(b) (15 points), Soit $F(\alpha, \beta) = \langle Bell | A \otimes B | Bell \rangle$.

et aussi après calcul on trouve :

$$A \otimes B = |\alpha\beta\rangle\langle\alpha\beta| - |\alpha\beta_\perp\rangle\langle\alpha\beta_\perp| - |\alpha_\perp\beta\rangle\langle\alpha_\perp\beta| + |\alpha_\perp\beta_\perp\rangle\langle\alpha_\perp\beta_\perp| .$$

Donc il suffit de calculer (comme les vecteurs sont réels) :

$$F(\alpha, \beta) = \langle Bell|\alpha\beta\rangle^2 - \langle Bell|\alpha\beta_\perp\rangle^2 - \langle Bell|\alpha_\perp\beta\rangle^2 + \langle Bell|\alpha_\perp\beta_\perp\rangle^2 .$$

Pour le premier terme on a ;

$$\langle Bell|\alpha\beta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \langle\uparrow|\alpha\rangle\langle\downarrow|\beta\rangle - \langle\downarrow|\alpha\rangle\langle\uparrow|\beta\rangle \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos\alpha \sin\beta - \sin\alpha \cos\beta)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\beta - \alpha).$$

⑥

$$\Rightarrow \quad F(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}\Big\{ (\sin(\beta-\alpha))^2 - (\sin(\beta_\perp-\alpha))^2 - (\sin(\beta-\alpha_\perp))^2 + (\sin(\beta_\perp-\alpha_\perp))^2 \Big\}$$

$$= \frac{1}{2}\Big\{ (\sin(\beta-\alpha))^2 - (\cos(\beta-\alpha))^2 - (\cos(\beta-\alpha))^2 + (\sin(\beta-\alpha))^2 \Big\}.$$

$$\Rightarrow \quad F(\alpha,\beta) = -\Big\{ (\cos(\beta-\alpha))^2 - (\sin(\beta-\alpha))^2 \Big\}$$

$$F(\alpha,\beta) = -\cos(2(\beta-\alpha)).$$

Pour $\alpha=\beta=0$ on vérifie $F(0,0)=-1$, ce qui est aussi obtenu directement.