Question 1++ (3 pts): entropie et performance de code

On a observé que les messages échangés entre une source et une destination utilisent toujours six symboles au maximum dont voici les fréquences d'apparitions :

Symbole	α	β	χ	δ	ε	ϕ
Fréquence d'apparition	1/2	1/4	1/32	1/8	1/32	1/16

En vous appuyant sur vos connaissances théoriques, sans faire des calculs, que peut-on affirmer concernant **l'entropie H** des messages échangés et la **performance** du code que l'on peut construire à l'aide de la table ci-dessus avec l'algorithme de **Shannon-Fano**, notée $\mathbf{L_{SF}}$, ou avec l'algorithme de **Huffman**, notée $\mathbf{L_H}$?

Complément exigé : pourquoi ?

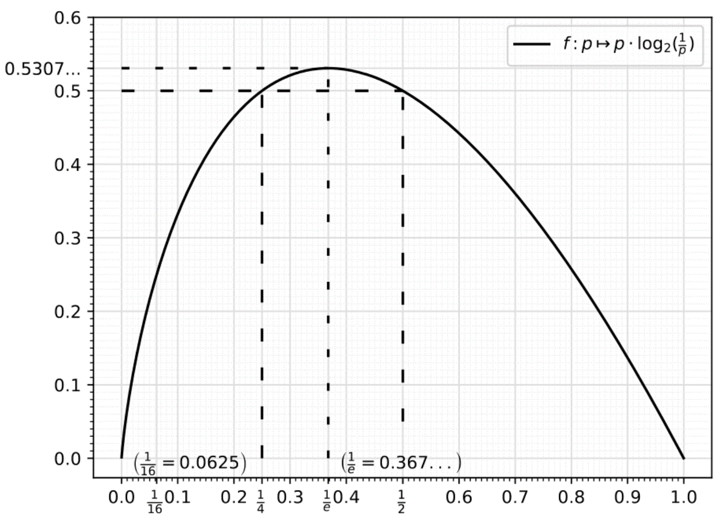
A	$H = \mathbf{L_H} = \mathbf{L_{SF}} = \log_2(6)$
B	$H < \mathbf{L_H} = \mathbf{L_{SF}} = H+1$
C	$H < \mathbf{L_H} < \mathbf{L_{SF}}$
D	aucune des autres réponses

Un raisonnement théorique, sans valeur numérique, suffit :

il y a **égalité de l'entropie avec les performances des algos de Shannon-Fano et de Hufmann** car toutes les fréquences d'apparitions sont des puissances négatives de 2. *Cependant* cette valeur n'est *pas* $\log_2(6)$ qui est obtenue quand toutes les toutes les probabilités d'apparitions sont égales.

Question 2 (2 pts): entropie et performance de code (suite de la question précédente)

Choisir le nombre de bits nécessaires, en moyenne, **pour envoyer un message de 10000 symboles** en supposant que ce message respecte les fréquences d'apparitions du tableau précédent et que le code est le meilleur qu'on puisse construire à partir de ce tableau. Quelques estimations simples à l'aide du graphe ci-dessous et la valeur $\mathbf{\log_2(6) = 2,58496..}$, vous permettent de faire un choix correct par élimination.



Le nombre de bits est en moyenne :

A	25850
B	19375
C	30000
D	15850

25850 correspond à 10'000*log2(6) qui n'est pas la valeur de l'entropie. 30000 est encore plus faux. 15850 est trop faible, ce qui est visible est estimant l'entropie avec le graphe.

Question 3++ (3pt) : échantillonnage

Soit le signal X(t) = 3cos(400πt)
Ce signal est échantillonné avec une fréquence d'échantillonnage de 300 Hz. On utilise ensuite la fonction d'interpolation sinc(t) présentée en cours pour reconstruire un signal Y(t) à partir des valeurs échantillonnées. Quelle est l'expression correcte du signal reconstruit Y(t) ?

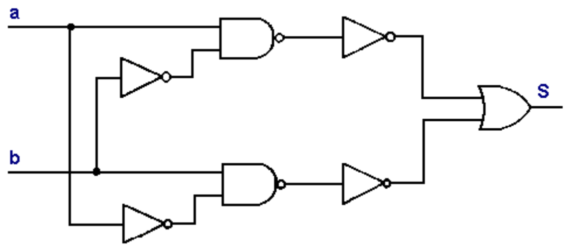
A	3cos(400πt)
B	3cos(100πt)
C	3cos(200πt)
D	3cos(150πt)

Complément exigé : pourquoi ?
Quantifier les grandeurs mentionnées

Il y a sous-échantillonnage car la fréquence du signal f vaut 200Hz ce qui est supérieur à fe/2 qui vaut 150Hz. La fréquence apparente fa vaut fe-f = 300-200 = 100Hz. D'où : 3cos(2π.100t)

Question 4 (2 pts) : Circuit mystère

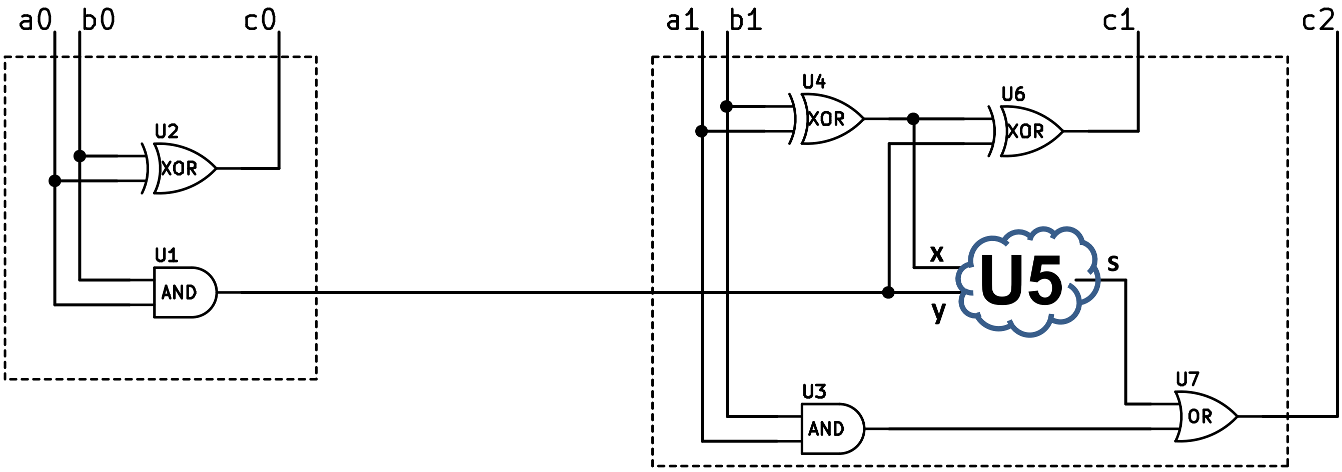
Soit le circuit constitué des portes logiques suivantes (cf page 2 pour le mode d'emploi) :



Quelle est la fonction logique réalisée par ce circuit ?

A	AND
B	NOR
C	XOR
D	OR

Question 5 (2 pt) : Circuit additionneur (incomplet) sur 2 bits, avec des portes logiques.



Ce circuit doit additionner en binaire les valeurs de deux opérandes **a** et **b** sur deux bits et donner le résultat **c** sur trois bits. Le circuit ci-dessus montre les entrées **a0**, **b0**, **a1** et **b1**, et les sorties **c0**, **c1** et **c2** dans lesquelles la valeur **0**, **1** ou **2** indique la puissance de deux associée. Exprimé en binaire, le circuit réalise l'opération : **c2c1c0 = a1a0** + **b1b0**.

Exemple : avec **a** valant $\mathbf{10_2}$ et **b** valant $\mathbf{11_2}$ on doit obtenir **c** de valeur $\mathbf{101_2}$.
Il manque cependant la porte **U5** pour que le circuit soit complet.

On demande dans un premier temps d'indiquer quelles doivent être les valeurs des entrées **x** et **y** de **U5** et de sa sortie **s** pour l'exemple suivant: $\mathbf{100_2 = 01_2 + 11_2}$.

A	x=1 , y=1 et s=1
B	x=1 , y=0 et s=0
C	x=0 , y=1 et s=0
D	x=1 , y=1 et s=0

Question 6 (2 pts): (suite de la question précédente)
Quelle est le type de la porte U5 pour réaliser l'addition binaire ?
On suggère d'analyser l'opération $\mathbf{010_2 = 01_2 + 01_2}$

A	OR
B	XOR
C	NAND
D	AND

Question 7 (2 pts) : Compléter la table de routage
Le réseau qui fait l'objet de cette question est particulier pour deux raisons : tout d'abord la distance est exprimée avec un nombre à coté du lien reliant deux nœuds. D'autre part, les liens sont unidirectionnels : la communication est seulement possible dans le sens indiqué par la flèche.

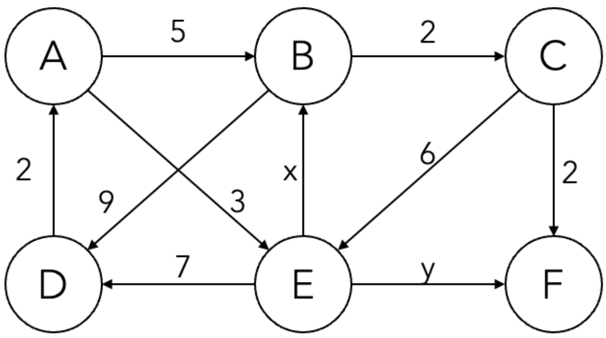
Voici la table de routage de A :

A	
destination	distance
B	5
C	7
D	10
E	3
F	9

Exemples :
1) le coût pour aller de A à E est de 3 car il existe un lien direct orienté de A vers E avec une distance de 3 indiquée sur le dessin.
2) il n'existe pas de chemin direct de A vers D car le lien va de D vers A ; il faut passer par le nœud E, ce qui produit une distance de 3 + 7 = 10.

Quelles sont les valeurs des distances **x** et **y** du réseau qui sont compatibles avec la table de routage de A ?

A	x= 1 et y= 6
B	x= 2 et y= 7
C	x= 3 et y= 5
D	x= 1 et y= 7



Question Ouverte 1 : (5 pts) *Traitement d'un signal*

On souhaite transmettre les valeurs v_1, v_2 et v_3 en construisant un signal *s(t)* dans lequel chacune des valeurs est l'amplitude d'une sinusoïde de fréquence respective f_1 , f_2 et f_3 :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ s(t) = v_1 \sin(2\pi f_1 t) + v_2 \sin(2\pi f_2 t) + v_3 \sin(2\pi f_3 t)$$

De plus on pose que les 3 fréquences f_1 , f_2 et f_3 doivent être non-nulles et séparées les unes des autres d'au moins 1000 Hz.

1.1) Le signal s(t) est transmis sur un cable mais malheureusement des *perturbations p(t)* s'ajoutent à *s(t)* et le signal $s_{out}(t)$ qui est mesuré à la destination contient aussi les deux types de composantes suivantes:

- Perturbation A: $a_{p0} \sin(2\pi f_{p0} t)$ avec $a_{p0} > 0$ et $f_{p0} = 50\text{Hz}$
- Perturbation B: de nombreuses composantes $a_{pi} \sin(2\pi f_{pi} t)$ avec $a_{pi} > 0$ et $f_{pi} \geq 50000$ Hz

Ainsi, le signal obtenu est : $s_{out}(t) = s(t) + p(t)$

Quelle est la gamme de fréquences utilisable pour f_1 , f_2 et f_3 pour pouvoir extraire s(t) de $s_{out}(t)$ à l'aide d'un seul filtre ? Indiquer un intervalle et préciser le type du filtre.

On doit avoir **50Hz < f1, f2 et f3 < 50KHz, c'est à dire]50, 50'000[.**

Il suffit d'un **filtre passe-bande** avec des fréquences de coupures **basse fcb** et **haute fch** telles que: **50Hz < fcb < f1, f2 et f3 < fch < 50KHz**

Dans la pratique on se donne une marge vis à vis des limites théoriques de 50Hz et 50 KHz. De même il est preferable d'avoir une marge entre une fréquence de coupure et la fréquence que l'on veut conserver.

1.2) Question indépendante de la précédente:

On dispose d'un appareil qui peut échantillonner un signal, c'est à dire mesurer son amplitude à une fréquence d'échantillonnage f_e. Chaque mesure est représentée sur 32 bits. Cependant cet appareil ne peut pas mémoriser les mesures ; il doit les transmettre à un ordinateur pour les mémoriser dans un disque. Sachant que le débit entre l'appareil de mesure et l'ordinateur est de seulement 176 KB/s quelle est la fréquence d'échantillonnage maximale $f_{e_{\max}}$, compatible avec ce débit ? (fournir le calcul établissant cette valeur)

176 KB/s représente 176*8 10^3 b/s.

Or chaque échantillon de mesure demande 32 bits, donc on peut effectuer seulement 176*8/32 10^3 mesures par seconde, c'est à dire 44 10^3 mesures/s.

La fréquence d'échantillonnage maximum **fe_{max}** est donc **44 KHz**.

1.3) Pour cette question nous retrouvons le signal *s(t)* de la question 1). Ajuster la gamme de fréquences utilisable pour f_1 , f_2 et f_3 afin de pouvoir reconstruire s(t) si seul le signal s(t) est échantillonné par $f_{e_{\max}}$.

On doit avoir **f1, f2 et f3 < fe_{max} /2 = 22 KHz**

1.4) On suppose ici que l'ajustement décrit en 1.3) est effectué sur les 3 fréquences de *s(t)* et nous retrouvons le signal $s_{out}(t)$ qui inclut les perturbations de la question 1.1). Que se passe-t-il si on échantillonne $s_{out}(t)$ avec la fréquence $f_{e_{\max}}$ obtenue à la question précédente ? Préciser si les deux types de perturbations, A et B, décrits en 1.1) ont le même effet.

On est dans une situation de sous-échantillonnage pour la seconde composante de perturbation car les fréquences de cette perturbation sont supérieures à $fe_{max}/2$. Cela va produire autant de **fréquence apparente** qu'il y a de fréquence de perturbation au-dessus de $fe_{max}/2$. Ces fréquences apparentes peuvent être arbitrairement proches des fréquences f1, f2 et f3, ce qui peut être très problématique.

La première perturbation est échantillonnée et reconstruite à l'identique car elle respecte la condition d'être inférieure à $fe_{max}/2$.

1.5) En conséquence de la question 1.4) que faut-il faire sur le signal $s_{out}(t)$ avant de l'échantillonner avec $f_{e_{\max}}$? On demande de préciser quantitativement votre réponse. On note *s'(t)* le signal ainsi obtenu avant échantillonnage. Le résultat de l'échantillonnage est noté $\hat{s}'(t)$.

il faut faire un **filtrage passe-bas** qui conserve les 3 fréquences f1, f2 et f3.

Sachant qu'elles sont compatibles avec fe_{max}, il suffit que la fréquence de coupure fc soit telle que : $\mathbf{fe_{max}/2 < fc < 50}$ **KHz**

1.6) On reconstruit un signal s'(t) à partir de $\hat{s}'(t)$; comment obtient-on s(t) à partir de de s'(t) ?

il faut faire un **filtrage passe-haut** qui supprime la composante reconstruite à 50 Hz ; la fréquence de coupure f'c est telle que : **50 < f'c < f1, f2 et f3**

1.7) Comment peut-on extraire chacune des 3 composantes de s(t) ?

Il faut isoler chaque composante avec un **filtre passe-bande** qui inclut chaque fréquence sans inclure les 2 autres fréquences.

Question Ouverte 2 : (4 pts) *jeu de rôles et entropie de l'usage de dés*

Pour jouer dans un jeu de rôles, vous utilisez des dés à 6 faces numérotées de 1 à 6.

2.1) Calculer l'entropie H(X) des 6 valeurs résultant du jet d'un dé à 6 face ; pour cet exercice on pose que chaque face du dé possède la même fréquence d'apparition (donner une valeur au centième près pour H(X)).

Puisque les 6 faces ont la **même probabilité d'apparition 1/6** nous sommes dans le cas **d'entropie maximum** pour laquelle toutes les probabilités sont égales. L'entropie H vaut alors **$Log_2(1/p)$** c'est-à-dire **Log2(6)** dont la valeur est fournie avec la question2 du quizz : 2,58496..

2.2) Vous trouvez un coffre mystérieux ; vous lancez un dé pour déterminer son contenu : si le dé donne 1 ou 2 ou 3, vous obtenez 100 pièces d'or. Si le dé donne 4 ou 5, vous obtenez une couronne magique. Si le dé donne 6, vous tombez dans un piège. Calculer l'entropie H(X) des 3 résultats possibles du coffre en utilisant leur fréquence d'apparition (donner une valeur au dixième près pour H(X)).

Les 3 résultats ont les probabilités d'apparition suivantes :

- Pièces d'or : ½
- Couronne : 1/3
- Piège : 1/6

On estime l'entropie avec le graphe de la question 2 du Quizz : $H \approx 0.5 + 0.52 + 0.43 = 1.45$

2.3) Un gobelin vous blesse dans un affrontement ; vous perdez un nombre de points de vie égal à la somme de deux dés à 6 faces. Calculer l'entropie H(X) de ces pertes en identifiant dans un premier temps les valeurs distinctes de pertes possibles et leur fréquence d'apparition. Ensuite on demande seulement l'expression développée de H(X) montrant une somme de termes de la forme $p.\log_2(1/p)$ avec les valeurs numériques de p. Il n'est pas nécessaire d'aller plus loin dans le calcul).

il y a 36 combinaisons possibles pour les jets de 2 dés ; ces combinaisons donnent les totaux indiqués dans la table et qui vont permettre d'établir leur fréquences d'apparitions :

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
2	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
3	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
4	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
5	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*
6	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*

$$H = 2.\left(1/36\log_2(36) + 2/36\log_2(36/2) + 3/36\log_2(36/3) + 4/36\log_2(36/4) + 5/36\log_2(36/5)\right) + 6/36\log_2(36/6)$$

2.4) Vous avez le choix entre deux épreuves vous permettant d'obtenir des points d'expérience. Les points sont obtenus:

- avec le lancer de 3 dés à 6 faces pour la première épreuve
- avec un dé à 20 faces numérotées de 1 à 20 (oui, ça existe) pour la seconde épreuve.

De par votre grande sagesse, vous préférez choisir l'épreuve avec l'entropie d'obtention des points d'expérience la plus faible. La réponse doit être justifiée mais c'est possible de le faire sans calculer les valeurs numériques des entropies.

Le dé à 20 face possède l'entropie maximum pour 20 symboles car les probabilités sont égales, c'est-à-dire **$\log_2(20)$** qui est forcément supérieure à $\log_2(16)$ l'entropie max pour les 16 valeurs de total que l'on peut obtenir avec 3 dés. Il faut donc choisir la première épreuve (avec 3 dés).