Algèbre linéaire avancée II
printemps 2022

Série 1

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Il n'y a pas d'exercice (+) dans la première série.

Exercice 1. Soit R un anneau.

i) Montrer que l'élément 1 est unique.

ii) Montrer qu'un élément inversible $r \in R^*$ n'est pas un diviseur de zéro.

iii) Montrer que deux polynômes

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots \quad \text{et} \quad q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots \in R[x]$$

sont égaux si et seulement si $a_i = b_i$ pour tous i.

iv) Soit $R^{n\times n}$ l'anneau des matrices $n \times n$ sur R. Montrer que le centre de $R^{n\times n}$ est $Z(R^{n\times n}) = \{aI_n \colon a \in Z(R)\}$.

Exercice 2.

1. Trouver le polynôme $f(x) \in \mathbb{Z}_5[x]$ de degré au plus 4 tel que $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, $f(3) = 0$, $f(4) = 4$. Établir un système d'équations linéaires correspondant.

2. Faire la division avec reste des polynômes $f(x) = 3x^4 + 2x^2 + x + 1$ et $2x^2 + 3x + 2$ sur le corps $\mathbb{Z}_5$.

Exercice 3. Soit K un corps. Montrer que le déterminant de $A = V_{r_0,\dots,r_n} \in K^{(n+1)\times(n+1)}$ est

$$\det(V_{r_0,\dots,r_n}) = \prod_{0\leq i<j\leq n} (r_j - r_i).$$

Exercice 4. Soit K un corps et $a_0, a_1, \ldots, a_n \in K$ des éléments distincts ($n \geq 1$). On définit

$$c_k(x) = \frac{\prod_{i\neq k}(x - a_i)}{\prod_{i\neq k}(a_k - a_i)}$$

et soit $f(x) \in K[x]$ un polynôme tel que $f(x) = 0$ ou $\deg(f(x)) \leq n$. Montrer que

$$f(x) = f(a_0)c_0(x) + f(a_1)c_1(x) + \cdots + f(a_n)c_n(x).$$

Exercice 5. (*)
Soit R un anneau et $\alpha \in Z(R)$ un élément du centre de R. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rrcl} \Phi\colon & R[x] & \to & R \\ & f(x) & \mapsto & f(\alpha) \end{array}$$

est un morphisme d'anneaux surjectif.