

- 1.1. (a) Exprimer la métrique euclidienne de  $\mathbb{R}^2$  en coordonnées polaires.  
(b) (Surface de révolution) Soit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe plane régulière paramétrée par longueur d'arc. On pose  $\gamma(u) = (r(u), z(u))$  et on suppose que  $r(u) > 0$ . On obtient une surface  $S$  qui est une sous-variété de  $\mathbb{R}^3$  par rotation de  $\gamma$  autour de l'axe  $Oz$ . Cette surface est paramétrée par

$$\Psi(u, \theta) = (r(u) \cos \theta, r(u) \sin \theta, z(u)).$$

Calculer le rappel de la métrique euclidienne de  $\mathbb{R}^3$  dans le système de coordonnées  $(u, \theta)$ .

- (c) Soit  $n \geq 1$  et  $N = (0, \dots, 0, 1)$  le pôle nord de la sphère unité  $\mathbb{S}^n$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Considérons la projection stéréographique  $f$  de  $\mathbb{S}^n \setminus \{N\}$  dans l'hyperplan  $\mathbb{R}^n$  des  $n$  premières coordonnées de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , qui associe à un point  $x$  l'unique point d'intersection de la droite passant par  $N$  et  $x$  avec  $\mathbb{R}^n$ . Montrer que  $f$  envoie la métrique sphérique usuelle de  $\mathbb{S}^n \setminus \{N\}$  sur la métrique

$$g = \frac{4 \sum_{i=1}^n dx_i^2}{(1 + \|x\|^2)^2}.$$

- (d) Calculer cette métrique dans le cas de la sphère de rayon  $a > 0$  (centrée en 0).

- 1.2. Soit  $(M, g)$  une variété Riemannienne connexe. Pour  $p, q \in M$ , on note  $\mathcal{C}_{p,q}$  l'ensemble des chemins  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  reliant  $p$  à  $q$  qui sont continus et de classe  $C^1$  par morceaux. Montrer que

$$d_g(p, q) := \inf\{\ell(\gamma) \mid \gamma \in \mathcal{C}_{p,q}\}$$

définit une métrique sur  $M$ .

- 1.3. Soient  $p \in \mathbb{R}$  et  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  donnée par  $f(x) = \|x\|^{2p} \cdot x$ .

- (a) Pour quelles valeurs de  $p$  la fonction  $f$  est-elle conforme?  
(b) Montrer que quand  $p = -1$ , l'application  $f$  est une isométrie pour la métrique sphérique de l'exercice 1.1 c).

- 1.4. Si  $U$  est un ouvert d'une variété semi-Riemannienne  $(M, g)$  et  $x^1, \dots, x^n$  est un système de coordonnées locales sur  $U$ , alors on définit le volume de  $(U, g)$  par

$$\text{Vol}_g(U) = \int_U \sqrt{|\det(g_{ij})|} dx^1 \cdots dx^n.$$

Démontrer soigneusement que cette notion est indépendante du choix du système de coordonnées.