EPFL - Printemps 2022	Prof. Z. Patakfalvi
Anneaux et Corps	**Exercices**
Série 1	28 Février 2022

1 Exercices

Exercice 1.
Soit R un anneau. Lesquels des sous-ensembles suivants sont-ils des sous-anneaux ?

1. $\{A \in M_n(R) \mid a_{ij} = 0 \text{ si } i > j\} \subset M_n(R)$.
2. $\{A \in M_n(R) \mid a_{ij} = 0 \text{ si } i \leq j\} \subset M_n(R)$.
3. $\{A \in M_n(R) \mid a_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j\} \subset M_n(R)$.
4. $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$.
5. $\{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$.
6. $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}\right\} \subset M_2(\mathbb{Z})$.
7. $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right\} \subset M_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Exercice 2.
Soit G un groupe fini non-trivial. Montrez que l'algèbre de groupe $\mathbb{Z}[G]$ contient des diviseurs de zéro.

Exercice 3.
Dans chacun des cas suivants, déterminez l'ensemble des homomorphismes d'anneaux $A \to B$.

1. $A = \mathbb{Z}$ et $B = \mathbb{Z}$.
2. $A = \mathbb{Z}$ et $B = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ où $n \in \mathbb{N}$.
3. $A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $B = \mathbb{Z}$ où $n \in \mathbb{N}$.
4. $A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $B = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ où $m, n \in \mathbb{N}$.
5. $A = \mathbb{Q}$ et $B = \mathbb{R}$.
6. $A = \mathbb{R}$ et $B = \mathbb{R}$.
7. $A = \mathbb{R}$ et $B = \mathbb{Q}$.
8. $A = \mathbb{R}[t]$ et $B = \mathbb{R}$.
9. $A = \mathbb{R}$ et $B = \mathbb{R}[t]$.

Indication : Pour le point 6, montrez qu'un homomorphisme $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ envoie les réels positifs vers les réels positifs, et déduisez que f préserve l'ordre usuel sur les réels.

Exercice 4.
Montrez qu'il existe au plus 4 homomorphismes d'anneaux $\mathbb{Z}[S_3] \to \mathbb{Z}[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}]$.
Indication : Si $f \colon \mathbb{Z}[S_3] \to \mathbb{Z}[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}]$ est un homomorphisme, étudiez les images possibles de (123).

Exercice 5.
Soit $n \geq 1$ un entier et $(A, +, \cdot)$ un anneau tel que le groupe additif sous-jacent $(A, +)$ est isomorphe au groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$. Fixons un élément $a \in A$ qui génère le groupe cyclique $(A, +)$.

1. Montrez que A est un anneau commutatif.
2. Montrez que, connaissant l'élément $a^2 \in A$, il est possible de déterminer la valeur du produit $x \cdot y$ pour tous éléments $x, y \in A$.

3. Montrez que a est un élément inversible.

4. Montrez que $A \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ en tant qu'anneaux.

Exercice 6.
Soient A un anneau commutatif et $a \in A$. Montrez que l'application

$$f\colon A[t] \to A[t], \quad p(t) \mapsto p(t+a)$$

est un isomorphisme d'anneaux.

Exercice 7.
Notons $M(\mathbb{R}) \subset \{(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}} \mid \forall i,j : a_{ij} \in \mathbb{R}\}$ l'ensemble des matrices infinies à coefficients réels qui vérifient la condition suivante : $(a_{ij}) \in M(\mathbb{R})$ si et seulement si le support de chaque ligne et de chaque colonne est fini, c'est-à-dire :

$$\forall i\ \exists m_i \text{ tel que } a_{ij} = 0 \text{ pour } j > m_i \ \text{ et } \ \forall j\ \exists n_j \text{ tel que } a_{ij} = 0 \text{ pour } i > n_j.$$

1. Montrez que l'addition et la multiplication usuelle de matrices induit une structure d'anneau sur $M(\mathbb{R})$.

2. Exhibez un élément de $M(\mathbb{R})$ qui est inversible à gauche, mais pas à droite.

Exercice 8.
Prouvez les affirmations suivantes.

1. Un anneau intègre et fini est un corps.

2. Un anneau A dans lequel $a = a^2$ pour tout $a \in A$, est commutatif.

2 Exercice supplémentaire

Cet exercice était l'exercice bonus de l'année 2021.

Exercice 9.
Soit k un corps. Considérons l'anneau des séries formelles $k[[t]]$.

1. Montrez que $f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$ est un élément inversible de $k[[t]]$ si et seulement si $a_0 \neq 0$.
Indication : Construisez les inverses algorithmiquement. Le cas de $f(t) = 1 - t$ est instructif pour comprendre la preuve générale.

2. Montrer que le corps de fraction de $k[[t]]$ est donné par les séries de Laurent

$$k((t)) := \left\{ \sum_{i=n}^{\infty} a_i t^i \mid a_i \in k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Indication : Vous n'avez pas besoin de prouvez que $k((t))$ est un anneau commutatif intègre.