Prof. Friedrich Eisenbrand 04 mars 2022

Algèbre linéaire avancée II
printemps 2022

Série 2

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. (+) Soit K un corps et $f(x) \in K[x]$ un polynôme de degré 3. Montrer que $f(x)$ est irréductible si et seulement si $f(x)$ n'a pas de racines en K.

Exercice 2.

i) Soit K un corps. Montrer : Un polynôme $p(x)$ divise chaque $f(x) \in K[x]$ si et seulement si $p(x) = a$ pour un élément $a \neq 0$ de K.

ii) Soit K un corps et $f(x), g(x) \in K[x] \setminus \{0\}$. On considère les assertions suivantes: a) $f(x) = ag(x)$, $a \in K \setminus \{0\}$. b) $f(x)$ et $g(x)$ ont les mêmes racines (avec multiplicité).

   Montrer que a) implique b). Est-ce que b) implique a)? (Justifiez votre réponse)

Exercice 3. Factoriser $f(x) \in K[x]$ en polynômes irréductibles.

a) $f(x) = 3x^4 + 2$, $K = \mathbb{Z}_5$.

b) $f(x) = 3x^4 + 2$, $K = \mathbb{Z}_{11}$.

c) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$, $K = \mathbb{Z}_7$.

d) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$, $K = \mathbb{Z}_3$.

e) $f(x) = x^4 - x^2 + x - 1$, $K = \mathbb{Z}_{13}$.

f) $f(x) = x^4 - x^2 + x - 1$, $K = \mathbb{Z}_{17}$.

Exercice 4. Calculer $\gcd(f, g)$ et $p, q \in F[x]$ t.q. $\gcd(f, g) = p \cdot f + q \cdot g$:

1. $f(x) = x^2 + 2$, $g(x) = x^3 + 4x^2 + x + 1$, $K = \mathbb{Z}_5$
2. $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, $K = \mathbb{Z}_2$
3. $f(x) = x^2 - x - 2$, $g(x) = x^5 - 4x^3 - 2x^2 + 7x - 6$, $K = \mathbb{Q}$.

Exercice 5. (*) Soit $f(x) \in \mathbb{R}[x] \setminus \{0\}$, $\deg(f) \geq 2$.

i) Montrer que si $\deg(f)$ est impair, alors $f(x)$ n'est pas irréductible.

ii) Montrer, à l'aide du théorème fondamental de l'algèbre[1], que si $f(x)$ est irréductible, alors $\deg(f) = 2$.

[1] Chaque polynôme $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, $\deg(f) \geq 1$ possède au moins une racine complexe.