

Veillez télécharger vos solutions à l'exercice 7 sur la page Moodle du cours avant le dimanche dimanche 20 mars, 18h.

---

## 1 Exercices

### Exercice 1.

Dans chacun des cas suivants, déterminer si l'ensemble  $B$  est un sous-anneau, un idéal à gauche, un idéal à droite, un idéal bilatère de l'anneau  $A$  ou s'il ne possède aucune de ces propriétés:

- (a)  $A = \mathbb{Z}$  et  $B = 9\mathbb{Z}$ ; (e)  $A = \mathbb{Q}$  et  $B = \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ ;  
(b)  $A = \mathbb{F}_{11}$  et  $B = \{[0], [2], [4], [6], [8], [10]\}$ ; (f)  $A = \mathbb{Q}$  et  $B = \mathbb{Z}[i]$ ;  
(c)  $A = \mathbb{Z}[t]$  et  $B = t^2 \cdot \mathbb{Z}[t^2]$ ; (g)  $A = \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$  et  $B = \{[0], [5], [10]\}$ ;  
(d)  $A = \mathbb{F}_2[t]$  et  $B = t^2 \cdot \mathbb{F}_2[t]$ ; (h)  $A = M_n(\mathbb{R})$ ,  $B = \{M \mid m_{ij} = 0 \text{ si } i < j\}$ ;  
(i)  $A = \mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid p \text{ ne divise pas } b \right\}$  et  $B = p^n \mathbb{Z}_{(p)}$ , où  $p$  est un premier et  $n \in \mathbb{N}$ ;  
(j)  $A = M_n(\mathbb{R})$  et  $B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ ;  
(k)  $A = M_n(\mathbb{R})$  et  $B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \mid a, b, c, d, e \in \mathbb{R} \right\}$ ;  
(l)  $A = M_n(\mathbb{R})$  et  $B = \left\{ \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ b & b & 0 \\ c & c & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ ;  
(m)  $A = \mathbb{C}[S_3]$  et  $B = \left\{ \sum_{g \in S_3} \lambda \cdot g \mid \lambda \in \mathbb{C} \right\}$ ;  
(n)  $A = \mathbb{C}[S_3]$  et  $B = \left\{ \sum_{g \in S_3} (-1)^{\text{sgn}(g)} \lambda \cdot g \mid \lambda \in \mathbb{C} \right\}$ ;  
(o)  $A = \mathbb{C}[S_3]$  et  $B = \{ \lambda \cdot \text{Id} + \lambda \varepsilon(123) + \lambda \varepsilon^2(132) + \mu(12) + \mu \varepsilon(23) + \mu \varepsilon^2(13) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{C} \}$ , où  $\varepsilon$  est une racine cubique primitive d'unité;  
(p)  $A = \mathbb{C}[S_3]$  et  $B = \{ \lambda(123) + \lambda(132) \mid \lambda \in \mathbb{C} \}$ .

### Exercice 2.

Soit  $K$  un corps et  $M_n(K)$  l'anneau des matrices carrées de taille  $n \times n$ .

1. Soit  $I$  un idéal à gauche de  $M_n(K)$  contenant la matrice  $e_{ij}$ . Montrer que  $I$  contient aussi toutes les matrices "concentrées dans la  $j$ -ème colonne", i.e.  $(b_{rs})$  avec  $b_{rs} = 0$  si  $s \neq j$ .

2. Montrer que le sous-ensemble des matrices concentrées dans la  $j$ -ème colonne forme un idéal à gauche de  $M_n(K)$ .
3. Montrer que les seuls idéaux bilatères de  $M_n(K)$  sont  $\{0\}$  et  $M_n(K)$ .

**Exercice 3.**

Dans chacun des cas suivants, déterminer si l'affirmation suivante est vraie ou fausse. Justifier la réponse par un raisonnement ou un contre-exemple.

- (a) Si  $A$  est un anneau intègre, et  $I$  et  $J$  sont deux idéaux non nuls de  $A$ , alors  $I \cap J$  est aussi un idéal non nul de  $A$ .
- (b) Si  $K$  est un corps, alors les deux seuls idéaux de  $K$  sont  $\{0\}$  et  $K$ .
- (c) Si  $A$  est un anneau n'ayant que deux idéaux bilatères, alors  $K$  est un corps.
- (d) Si  $A$  est un anneau commutatif n'ayant que deux idéaux, alors  $K$  est un corps.

**Exercice 4.**

Montrer les isomorphismes suivants:

- (a)  $K[t]/(t - a) \cong K$  si  $K$  est un corps et  $a \in K$ .
- (b)  $M_n(A)/M_n(I) \cong M_n(A/I)$  si  $I$  est un idéal bilatère de  $A$ .
- (c)  $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]/(5 + 2\sqrt{7}) \cong \mathbb{Z}/3$  (on pourra commencer par identifier le noyau de l'unique homomorphisme d'anneaux  $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}[\sqrt{7}]/I$ ).

**Exercice 5.**

Soit  $A$  un anneau intègre. Si  $f, g \in A[t]$ , alors  $\deg(f \cdot g) = \deg(f) + \deg(g)$ .

**Exercice 6.**

Montrer que  $\mathbb{Z}[\varepsilon] \cong \mathbb{Z}[t]/(t^2 + t + 1)$ , où  $\varepsilon$  est une racine cubique primitive de l'unité.

## 2 Exercice Bonus 1

**Exercice 7.**

The goal of this exercise is to show that  $\mathbb{Q}$  can be exhibited as the fraction field of many subrings other than  $\mathbb{Z}$ . We begin by giving the following definitions.

**Definition 1** (Valuation Function).

Let  $K$  be a field, a discrete valuation is a function  $\nu: K \setminus 0 \rightarrow \mathbb{Z}$ , such that

- a)  $\nu(x \cdot y) = \nu(x) + \nu(y)$
- b)  $\nu(x + y) \geq \min(\nu(x), \nu(y))$

We say that  $\nu$  is non-trivial if it is not the constant 0 function

**Definition 2** (Valuation Ring).

If  $\nu$  is a discrete valuation function on the field  $K$ , then the valuation ring  $R_\nu$  is the subset  $\{x \in K \mid \nu(x) \geq 0\} \cup \{0\}$  of  $K$ .

Show that for a discrete valuation function  $\nu$  on  $K$  we have:

1.  $\nu(1) = 0, \nu(-1) = 0$ .
2.  $R_\nu$  is a subring of  $K$ .
3.  $K$  is the fraction field of  $R_\nu$ .

From now on,  $K = \mathbb{Q}$ , that is the field of rational numbers. Show that

- 4 For every  $x \in \mathbb{Z}$  we have  $\nu(x) \geq 0$ .
- 5 If  $\nu(p) = 0$  for all primes  $p$ , then  $\nu$  is trivial.
- 6  $\nu(p) \neq 0$  can happen for at most one (positive) prime  $p$ .
- 7 If  $\nu(p) \neq 0$ , then  $\nu$  is given by  $\nu(p^i a/b) = i \cdot c$ , where  $a$  and  $b$  are prime to  $p$  and  $c$  is a fixed positive integer. Conversely, show that the above formula is a discrete valuation (called the  $p$ -adic valuation for  $c = 1$ , which we denote by  $\nu_p$ ).
- 8 Show that the valuation ring of  $\nu_p$  is not equal to  $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ .