Prof. Friedrich Eisenbrand 25 février 2022

Algèbre linéaire avancée II
printemps 2022

Série 1 - Corrigé

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Il n'y a pas d'exercice (+) dans la première série.

Exercice 1. Soit R un anneau.

i) Montrer que l'élément 1 est unique.

ii) Montrer qu'un élément inversible $r \in R^*$ n'est pas un diviseur de zéro.

iii) Montrer que deux polynômes

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots \quad \text{et} \quad q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots \in R[x]$$

sont égaux si et seulement si $a_i = b_i$ pour tous i.

iv) Soit $R^{n\times n}$ l'anneau des matrices $n \times n$ sur R. Montrer que le centre de $R^{n\times n}$ est $Z(R^{n\times n}) = \{aI_n \colon a \in Z(R)\}$.

Solution. *i) Soit $1'$ un élément tel que $a1' = 1'a = a$ pour chaque $a \in R$. Alors*

$$1' = 1 \cdot 1' = 1.$$

ii) Soit $r \in R^*$ et $a \in R$. Si $ra = 0$, alors $r^{-1}ra = r^{-1}0 = 0$ et donc $1 \cdot a = a = 0$. C.-à-d. r n'est pas un diviseur de zéro.

iii) Si $a_i = b_i$ pour tous i, alors $p(x) = q(x)$. Si $p(x) = q(x)$, alors $p(x) - q(x) = 0$. Théorème 1.1 (ii) implique $a_i - b_i = 0$ pour tous i, c.à.d. $a_i = b_i$ pour tous i.

iv) Pour $A \in R^{n\times n}$ et $a \in Z(R)$ on a $(aI_n)A = aA$ et $A(aI_n) = (AI_n)a = Aa = aA$. La dernière égalité est justifiée du fait que $a \in Z(R)$.

Soit $C \in Z(R^{n\times n})$ et $A^{ij} \in R^{n\times n}$ la matrice définie par

$$(A^{ij})_{kl} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq i \text{ ou } l \neq j \\ 1 & \text{autrement.} \end{cases}.$$

La matrice CA^{ii} est nulle partout sauf la i-ème colonne qui est la i-ème colonne de C. De même, la matrice $A^{ii}C$ est nulle partout sauf la i-ème ligne qui est la i-ème ligne de C. Comme on a $CA^{ii} = A^{ii}C$ pour tout i, on déduit que C est une matrice diagonale : $C = \operatorname{diag}(c_1, \ldots, c_n)$. Par suite, la matrice $A^{ij}C$ est nulle partout, sauf l'élément $(A^{ij}C)_{ij} = c_j$, et la matrice CA^{ij} est nulle partout, sauf l'élément $(CA^{ij})_{ij} = c_i$. À nouveau, $CA^{ij} = A^{ij}C$, et donc $C = cI_n$ pour un $c \in R$. Enfin, $crI_n = cI_nrI_n = rI_ncI_n = rcI_n$, d'où $c \in Z(R)$.

Exercice 2. 1. Trouver le polynôme $f(x) \in \mathbb{Z}_5[x]$ de degré au plus 4 tel que $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, $f(3) = 0$, $f(4) = 4$. Établir un système d'équations linéaires correspondant.

2. Faire la division avec reste des polynômes $f(x) = 3x^4 + 2x^2 + x + 1$ et $2x^2 + 3x + 2$ sur le corps $\mathbb{Z}_5$.

Solution. *1. Soit le polynôme $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$. On a que*

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ a + b + c + d + e &= 2 \\ a + 2b + 4c + 8d + 16e &= 4 \\ a + 3b + 9c + 27d + 81e &= 0 \\ a + 4b + 16c + 64d + 256e &= 4 \end{aligned}$$

On peut simplifier le système, vu que les coefficients sont dans $\mathbb{Z}_5$. On doit résoudre le système :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

On résout ce système d'équations sur $\mathbb{Z}_5$ et on trouve des valeurs pour a, b, c, d, e. Le système donne comme solution $a = 1, b = 0, c = 3, d = 4, e = 4$. Le polynôme $f(x)$ sera donc $f(x) = 1 + 3x^2 + 4x^3 + 4x^4$.

*2. On trouve que $3X^4 + 2X^2 + X + 1 = (2X^2 + 3X + 2)(4X^2 + 4X + 1) + 4$.
En détails:*

$$\begin{array}{r|l} 3x^4 + 2x^2 + x + 1 & 2x^2 + 3x + 2 \\ \cline{2-2} \underline{3x^4 + 2x^3 + 3x^2} & 4x^2 + \ldots \\ 3x^3 + 4x^2 + x + 1 & \end{array}$$

$$
\begin{array}{c|c}
3x^4+2x^2+x+1 & 2x^2+3x+2 \\ \cline{2-2}
3x^4+2x^3+3x^2 & 4x^2+4x+\dots \\ \cline{1-1}
3x^3+4x^2+x+1 & \\
3x^3+2x^2+3x & \\ \cline{1-1}
2x^2+3x+1 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|c}
3x^4+2x^2+x+1 & 2x^2+3x+2 \\ \cline{2-2}
3x^4+2x^3+3x^2 & 4x^2+4x+1 \\ \cline{1-1}
3x^3+4x^2+x+1 & \\
3x^3+2x^2+3x & \\ \cline{1-1}
2x^2+3x+1 & \\
2x^2+3x+2 & \\ \cline{1-1}
4 &
\end{array}
$$

Exercice 3. Soit K un corps. Montrer que le déterminant de $A = V_{r_0,\dots,r_n} \in K^{(n+1)\times(n+1)}$ est

$$\det(V_{r_0,\dots,r_n}) = \prod_{0\leq i<j\leq n} (r_j - r_i).$$

Solution. *On montre que* $\det(A) = \prod_{0\leq i<j\leq n}(x_j - x_i)$ *par récurrence :*
Pour $n = 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{pmatrix}$ *et clairement* $\det(A) = x_1 - x_0$.
Pour $n > 1$*: On modifie* A *par l'addition de* $(-x_0)$ *fois la colonne* j *à la colonne* $j+1$ *pour* $j = n, n-1, \dots, 1$*, pour obtenir la matrice*

$$
\begin{aligned}
A' &= \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
1 & x_1 - x_0 & x_1^2 - x_1x_0 & \dots & x_1^n - x_1^{n-1}x_0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
1 & x_{n-1} - x_0 & x_{n-1}^2 - x_{n-1}x_0 & \dots & x_{n-1}^n - x_{n-1}^{n-1}x_0 \\
1 & x_n - x_0 & x_n^2 - x_nx_0 & \dots & x_n^n - x_n^{n-1}x_0
\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
1 & x_1 - x_0 & (x_1 - x_0)x_1 & \dots & (x_1 - x_0)x_1^{n-1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
1 & x_{n-1} - x_0 & (x_{n-1} - x_0)x_{n-1} & \dots & (x_{n-1} - x_0)x_{n-1}^{n-1} \\
1 & x_n - x_0 & (x_n - x_0)x_n & \dots & (x_n - x_0)x_n^{n-1}
\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Alors $\det(A) = \det(A') = \prod_{i=1}^n (x_i - x_0) \det(B')$ *où* B' *est la matrice donnée par*

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \dots & x_{n-1}^n \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Par l'hypotèse de récurrence, $\det(B') = \prod_{1 \le i < j \le n}(x_j - x_i)$, *et donc* $\det(A) = \det(A') = \prod_{0 \le i < j \le n}(x_j - x_i)$.

Exercice 4. Soit K un corps et $a_0, a_1, \dots, a_n \in K$ des éléments distincts ($n \ge 1$). On définit

$$c_k(x) = \frac{\prod_{i \ne k}(x - a_i)}{\prod_{i \ne k}(a_k - a_i)}$$

et soit $f(x) \in K[x]$ un polynôme tel que $f(x) = 0$ ou $\deg(f(x)) \le n$. Montrer que

$$f(x) = f(a_0)c_0(x) + f(a_1)c_1(x) + \dots + f(a_n)c_n(x).$$

Solution. *Remarquons que les polynômes* c_k *sont tous de degré* n *et valent* 1 *en* $x = a_k$ *et* 0 *en* a_i, $i \ne k$.

On a donc, par construction des c_k, *que la somme*

$$g(x) := f(a_0)c_0(x) + f(a_1)c_1(x) + \dots + f(a_n)c_n(x)$$

est un polynôme de degré n *vérifiant* $g(a_k) = f(a_k)\ \forall k$.

De plus, d'après le cours, pour que deux polynômes de degrés n *soient égaux il faut et il suffit qu'ils soient égaux en* $n+1$ *valeurs distinctes. D'où* $g \equiv f$.

Exercice 5. (*)
Soit R un anneau et $\alpha \in Z(R)$ un élément du centre de R. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \Phi\colon R[x] &\to R \\ f(x) &\mapsto f(\alpha) \end{aligned}$$

est un morphisme d'anneaux surjectif.

Solution.