EPFL - Printemps 2022	M. Troyanov
Géométrie Riemannienne	**Exercices**
Corrigé 2	1er Mars 2022

2.1. (a) On note $\frac{\partial w}{\partial t}$ la dérivée partielle de w par rapport à t. On rappelle que, par définition, cette dérivée partielle est obtenue en fixant la variable s et en dérivant w par rapport à t uniquement :

$$\frac{\partial w}{\partial t}(s,t) = \lim_{h\to 0} \frac{w((s,t)+h(0,1))}{h}.$$

C'est un cas particulier de ce qu'on appelle une *dérivée directionnelle.*
On note maintenant $\frac{dw}{dt}$ la dérivée totale par rapport à t. La définition est donnée par la formule

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial s}\frac{ds}{dt}.$$

(b) En comparant les deux expressions précédentes, on constate que

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t}$$

dans l'un des deux cas suivants : (i) si w ne dépend pas de s ou (ii) si s ne dépend pas de t.

(c) Dans la preuve des équations d'Euler-Lagrange (relire), il y a une étape où apparaît une intégrale contenant le terme $\frac{\partial^2 x^i}{\partial t \partial s} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial x^i}{\partial s}$. Il est légitime de remplacer ce terme par $\frac{d}{dt}\frac{\partial x^i}{\partial s}$ car s ne dépend pas de t, et cela justifie l'intégration par parties utilisée dans l'argument.

2.2. (a) On considère une application "changement de paramétrisation",

$$f : [c,d] \to [a,b]\,.$$

On peut supposer que f est croissante (sinon l'exercice se traite de la même façon). On a alors $\dot{\overline{\gamma \circ f}} = f'(t)\dot\gamma(f(t))$ donc $\left\|\dot{\overline{\gamma \circ f}}\right\| = f'(t)\,\|\dot\gamma(f(t))\|$ (f est croissante) puis

$$\begin{aligned} l(\gamma\circ f) &= \int_c^d \left\|\dot{\overline{\gamma\circ f}}\right\| dt \\ &= \int_c^d f'(t)\,\|\dot\gamma(f(t))\|\,dt \\ &= l(\gamma) \end{aligned}$$

après avoir fait le changement de variables associé à f.

(b) L'énergie n'est pas invariante par reparamétrisation. En effet les deux courbes (dans $\mathbb{R}$) définie par

$$\begin{aligned} \gamma_1 :\ & [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \quad t \longmapsto t \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \gamma_2 :\ & [0,2] \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \quad t \longmapsto \tfrac{t}{2} \end{aligned}$$

ont même image mais $E(\gamma_1) = \frac{1}{2}$ alors que $E(\gamma_2) = \frac{1}{4}$.

(c) On a, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz,

$$\begin{aligned} l(\gamma)^2 &= \left(\int_a^b \|\dot\gamma(t)\|\, dt\right)^2 \\ &\leqslant \int_a^b \|\dot\gamma(t)\|^2\, dt \int_a^b dt \\ &= 2(b-a)E(\gamma). \end{aligned}$$

L'égalité a lieu s'il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwartz, c'est-à-dire si les fonctions $t \mapsto \|\dot\gamma(t)\|$ et $t \mapsto 1$ sont proportionnelles, autrement dit, si γ est parcourue à vitesse constante.

2.3. (a)

- Si V est un espace vectoriel et si $< \cdot, \cdot >$ est un produit scalaire sur V (ou même seulement une forme bilinéaire non dégénérée), on dispose d'un isomorphisme de V sur son dual V^* grâce à l'application

$$\begin{array}{rccl} f: & V & \longrightarrow & V^* \\ & x & \longmapsto & y \mapsto < y, x > \end{array}.$$

- Le cas riemannien est une généralisation variationnelle de cette idée. Une métrique riemannienne fournit un isomorphisme de $\Gamma(M)$ (i.e "un vecteur variable") vers $\Omega^1(M)$ (i.e "un covecteur variable") grâce à

$$\begin{array}{rccl} f: & \Gamma(M) & \longrightarrow & \Omega^1(M) \\ & X & \longmapsto & Y \mapsto < Y, X > \end{array}.$$

Le résultat en découle.

(b) On fixe des coordonnées locales $x^1, \cdots, x^n$. On écrit la métrique g dans ces coordonnées :

$$g = \sum_{ij} g_{ij} dx^i dx^j,$$

la forme θ :

$$\theta = \sum_i a_i dx^i,$$

le champ X :

$$X = \sum_j X^j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

et le champ $\theta^\#$:

$$\theta^\# = \sum_j b^j \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Toutes ces quantités sont liées par l'équation de la question (a), i.e, pour tout champs X,

$$\sum_{ij} g_{ij} X^i b^j = \sum_i a_i X^i.$$

Puisque cette égalité a lieu pour tout X, on en déduit que, pour tout i,

$$\sum_j g_{ij} b^j = a_i.$$

C'est un système d'équations linéaires d'inconnues b_j. On sait que la matrice (g_{ij}) est inversible puisque la métrique est non dégénérée. On note alors $\tilde{g}_{ij}$ les coefficients de la matrices $(g_{ij})^{-1}$. Le système se résout en

$$b^i = \sum_j \tilde{g}_{ij} a_j$$

pour tout i, ou encore,

$$\theta^{\#} = \sum_i \left(\sum_j \tilde{g}_{ij} a_j \right) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Il suffit d'appliquer ce qui précède à $\theta = df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx^i$. On obtient

$$df^{\#} = \sum_i \left(\sum_j \tilde{g}_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

(c)
- Les coordonnées cartésiennes sont données par $g_{ij} = \delta_{ij}$ et donc aussi $\tilde{g}_{ij} = \delta_{ij}$. On trouve, en appliquant la formule précédente,

$$df^{\#} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y}.$$

- Les coordonnées polaires de la métrique ont été calculées la semaine passée. On a $g_{rr} = 1$, $g_{r\theta} = 0$ et $g_{\theta\theta} = r^2$. Après avoir inversé g et avec la formule précédente, on trouve,

$$df^{\#} = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

2.4. (a) La métrique sphérique dans les coordonnées (colatitude, longitude) $= (\phi, \theta)$ s'écrit

$$g = f^* \mathrm{Eucl} = d\theta^2 + (\sin\theta)^2 d\phi^2,$$

où $\mathrm{Eucl} = dx^2 + dy^2 + dz^2$ est la métrique euclidienne dans $\mathbb{R}^3$ (voir les notes de cours).

(b) La projection cylindrique du point $f(\phi, \theta)$ donne les coordonnées (ϕ, z) où $z = \cos(\theta)$. On a $dz = -\sin(\theta) d\theta$ et donc $d\theta^2 = \frac{dz^2}{1-z^2}$. Ainsi le tenseur métrique s'écrit

$$g = d\theta^2 + (\sin\theta)^2 \, d\phi^2 = \frac{dz^2}{1-z^2} + (\sin\theta)^2 \, d\phi^2 = \frac{dz^2}{1-z^2} + (1-z^2) \, d\phi^2.$$

Donc dans les coordonnées (ϕ, z) on a $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} (1-z^2) & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-z^2} \end{pmatrix}$

(c) On écrit

$$g = d\theta^2 + (\sin\theta)^2 d\phi^2 = (\sin\theta)^2 \left(\frac{d\theta^2}{(\sin\theta)^2} + d\phi^2 \right)$$

Si u est une fonction qui vérifie $du = \pm \frac{d\theta}{\sin\theta}$ alors le tenseur métrique dans les coordonnées (u, ϕ) sera conforme :

$$g = (\sin\theta)^2 \left(du^2 + d\phi^2 \right).$$

On peut donc prendre la fonction

$$u = \pm \int_0^\theta \frac{dt}{\sin(t)} = \pm \log \left(\tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right).$$

Cette relation est équivalente à $\sin(\theta) = \frac{2e^{2u}}{1+e^{2u}}$. Le tenseur métrique de la sphère dans les coordonnées (u, ϕ) de Mercator s'écrit donc

$$g = \frac{4e^{2u}}{(1+e^{2u})^2} \left(du^2 + d\phi^2 \right).$$

(d) On cherche l'équation des géodésiques pour la métrique g dans les coordonnées (ϕ, θ). Faisons le changement de notations $x = \phi$, $y = \theta$ (ça sera plus agréable pour la suite). On a alors

$$g = d\theta^2 + (\sin\theta)^2 d\phi^2 = (\sin(y))^2 dx^2 + dy^2.$$

Si on note $u = \dot{x}$ et $v = \dot{y}$, alors le Lagrangien associé à l'énergie s'écrit

$$f(x, y, u, v) = \frac{1}{2}\|\dot{\gamma}(t)\|_g^2 = \frac{1}{2}\left((\sin(y))^2\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = \frac{1}{2}\left((\sin(y))^2 u^2 + v^2\right).$$

Les équations d'Euler-Lagrange s'écrivent

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial u} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial v}.$$

La première équation nous donne

$$0 = \frac{d}{dt}\left((\sin(y))^2 u\right) = \sin(y)^2\dot{u} + 2\sin(y)\cos(y)\dot{y}u,$$

qui peut s'écrire de la façon suivante (en tenant compte que $u = \dot{x}$ et $v = \dot{y}$) :

$$\ddot{x} + 2\tan(y)\dot{x}\dot{y} = 0.$$

La deuxième équation nous donne

$$\sin(y)\cos(y)u^2 = \dot{v},$$

c'est-à-dire :

$$\ddot{y} - \sin(y)\cos(y)\dot{x}^2 = 0.$$

En revenant aux notations $\phi = x$ et $\theta = y$, on écrit les équations des géodésiques sur la sphère ainsi :

$$\begin{cases} \ddot{\phi} + 2\tan(\theta)\dot{\phi}\,\dot{\theta} & = 0 \\ \ddot{\theta} - \sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\phi}^2 & = 0. \end{cases}$$