EPFL - Printemps 2022	Prof. Z. Patakfalvi
Anneaux et Corps	**Exercices**
Série 3	11ème Mars 2022

Veuillez télécharger vos solutions à l'exercice 8 sur la page Moodle du cours avant le dimanche dimanche 27 mars, 18h.

1 Exercices

Exercice 1.
Dans chacun des cas suivants, déterminer si l'affirmation suivante est vraie ou fausse. Justifier la réponse par un raisonnement ou un contre-exemple.

1. L'image d'un idéal bilatère par un homomorphisme d'anneaux est encore un idéal bilatère.
2. La préimage d'un idéal bilatère par un homomorphisme d'anneaux est encore un idéal bilatère.

Exercice 2.
Considérons l'homomorphisme

$$\xi_p : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[t] & \to & \mathbb{F}_p[t] \\ \sum_{i=0}^n a_i t^i & \mapsto & \sum_{i=0}^n [a_i] t^i \end{array}$$

qui envoie un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$ au polynôme obtenu par réduction des coefficients mod p. Montrez que la préimage $\xi_p^{-1}(I)$ d'un idéal $I \in \mathbb{F}_p[t], I \neq 0, I \neq \mathbb{F}_p[t]$ n'est pas principal.

Exercice 3.
Soient m et n deux entiers naturels et (m) et (n) les deux idéaux principaux de $\mathbb{Z}$ correspondants.

1. **Identité de Bézout.** Soit d le pgdc de m et n. Montrer qu'il existe des entiers relatifs a, b tels que $am + bn = d$.
2. Identifier les idéaux $(m) \cdot (n)$, $(m) \cap (n)$ et $(m) + (n)$.

Exercice 4.
Soit $f \colon A \to B$ un homomorphisme d'anneaux.

1. Montrer que $\mathrm{car}(B)$ divise $\mathrm{car}(A)$, mais qu'en général $\mathrm{car}(B) \neq \mathrm{car}(A)$.
2. Montrer que si f est injectif alors $\mathrm{car}(B) = \mathrm{car}(A)$.
3. Montrer que si A est commutatif et $\mathrm{car}(A) = p$, un nombre premier, alors l'application $F \colon A \to A$ définie par $F(a) = a^p$ est un homomorphisme d'anneaux.
4. Calculer la caractéristique de l'anneau $\mathbb{Z}[i]/(i-2)$.

Exercice 5.
Soit $A = \mathbb{Z}/250\mathbb{Z}$.

1. Trouver tous les diviseurs de zéro et tous les éléments inversibles de A.
2. Trouver tous les idéaux de A qui contiennent $[50]$.

Exercice 6.
Soit A le sous-anneau de $M_2(\mathbb{Z})$ des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ où $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Montrez que le sous-ensemble K des matrices pour lesquelles $5 \mid a$ et $11 \mid b$ est un idéal bilatère et construire un isomorphisme (en deux temps) $A/K \to \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$.

Exercice 7. 1. Montrer que $\mathbb{C}[x,y]/(x) \cong \mathbb{C}[y]$ (donner la forme explicite de l'isomorphisme).

2. Construire un homomorphisme d'anneaux $\mathbb{C}[x,y] \to \mathbb{C}[x] \times \mathbb{C}[y]$ dont le noyau est (xy).
3. Identifier l'image de cet homomorphisme et en conclure que $\mathbb{C}[x,y]/(xy)$ est isomorphe au sous-anneau de $\mathbb{C}[x] \times \mathbb{C}[y]$ formé des couples de polynômes $(p(x), q(y))$ tels que $p(0) = q(0)$.

2 Exercice Bonus

Exercice 8.
Let $p \in \mathbb{N}$ be a prime number, ν_p be the p-adic valuation on $\mathbb{Q}$, and let R be the valuation ring of ν_p.

1. Show that every $q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ with $\nu_p(q) = 0$ is an invertible element of R.
2. Show that (0) and (p^n) for $n \in \mathbb{N}$ is a complete list of ideals of R, and that all ideals in this list are different.
3. Show that $R/(p^n) \cong \mathbb{Z}/(p^n)$
4. Denote by R_p the valuation ring we obtain for different choices of p. Show that the different R_p's as well as $\mathbb{Z}$ are pairwise non-isomorphic rings (here we ask for isomorphism as abstract rings, so not as subrings of $\mathbb{Q}$).

3 Exercice supplémentaire

Cet exercice était l'exercice bonus de l'année 2021 (l'exercice ne sera pas dans l'examen).

Exercice 9.
Soit A un anneau commutatif. Notons que s'il existe un homomorphisme d'anneaux injectif $K \hookrightarrow A$ où K est un corps, alors A a la structure d'un K-espace vectoriel. D'ailleurs, pour V un K-espace vectoriel,

$$\mathrm{End}_K(V) := \{\phi : V \to V \mid \phi \text{ est } K \text{ linéaire}\}$$

est un anneau, avec l'addition et la composition de fonctions comme opérations. On définit le **crochet de Lie** sur $\mathrm{End}_K(V)$ de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{End}_K(V) \times \mathrm{End}_K(V) & \to & \mathrm{End}_K(V) \\ (\phi, \psi) & \mapsto & [\phi, \psi] := \phi \circ \psi - \psi \circ \phi \end{array}$$

Supposons maintenant que A est un anneau commutatif tel que $K \hookrightarrow A$ où K est un corps. Nous désignons par $m_a \in \mathrm{End}_K(A)$ la multiplication par un élément $a \in A$,

$$m_a : \begin{array}{ccc} A & \to & A \\ x & \mapsto & ax \end{array}.$$

Nous définissons les **opérateurs K-différentiels sur A de degré au plus n** inductivement par :

- $D_{\leq -1}(A) = \{m_0\}$,
- $D_{\leq 0}(A) = \{m_a \mid a \in A\}$,
- pour $n > 0$, posons $D_{\leq n}(A) = \{\psi \in \mathrm{End}_K(A) \mid [\psi, m_a] \in D_{\leq n-1}(A)\ \forall a \in A\}$.

Remarquez que $D_{\leq n}(A) \subseteq D_{\leq n+1}(A)$. On définit

$$D(A) := \bigcup_{n \geq -1} D_{\leq n}(A) \ \subset \mathrm{End}_K(A).$$

On peut montrer que $D(A)$ est un sous-anneau de $\mathrm{End}_K(A)$, mais il n'est pas nécessaire de le vérifier. On remarque que pour chaque $K \ni \lambda \mapsto m_\lambda \in D_{\leq 0}(A)$ est le plongement de K dans $D(A)$ qui donne la structure d'espace vectoriel sur K.

A partir de maintenant, nous considérons le cas $A = K[x]$.

1. Montrer que le crochet de Lie

$$\begin{array}{ccc} D(K[x]) \times D(K[x]) & \to & D(K[x]) \\ (F, G) & \mapsto & [F, G] \end{array}$$

   est K-bilinéaire.

2. Soit $\frac{\partial}{\partial x} \in \mathrm{End}_K(K[x])$ défini par $\frac{\partial}{\partial x}(x^i) = i \cdot x^{(i-1)}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Montrez que $\left[\frac{\partial}{\partial x}, m_x\right] = m_1$.

3. Prenons $\frac{\partial}{\partial x}$ comme au-dessus. Montrez que $\left[\frac{\partial}{\partial x}, m_{x^j}\right] = j \cdot m_{x^{(j-1)}}$ pour $j \in \mathbb{N}$.

4. Prenons $\frac{\partial}{\partial x}$ comme au-dessus. Montrez que $\frac{\partial}{\partial x} \in D_{\leq 1}(K[x])$.