Prof. Friedrich Eisenbrand 04 mars 2022

Algèbre linéaire avancée II
printemps 2022

Série 2 – Corrigé

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. (+) Soit K un corps et $f(x) \in K[x]$ un polynôme de degré 3. Montrer que $f(x)$ est irréductible si et seulement si $f(x)$ n'a pas de racines en K.

Solution. ($\rightarrow$) *Si le polynôme $f(x)$ a une racine α en K, alors il a un facteur $x - \alpha$ et donc il est réductible.*

($\leftarrow$) *S'il est réductible, il admet alors un facteur de degré 1 sur K, c'est-à-dire que $(\beta x + \gamma) | f(x)$. Mais vu qu'on est dans un corps K, cela implique que l'élément $-\gamma/\beta$ est une racine de $f(x)$, ce qui contredit notre hypothèse. Ainsi, $f(x)$ n'a pas de racines en K.*

Exercice 2.

i) Soit K un corps. Montrer : Un polynôme $p(x)$ divise chaque $f(x) \in K[x]$ si et seulement si $p(x) = a$ pour un élément $a \neq 0$ de K.

ii) Soit K un corps et $f(x), g(x) \in K[x] \setminus \{0\}$. On considère les assertions suivantes: a) $f(x) = ag(x)$, $a \in K \setminus \{0\}$. b) $f(x)$ et $g(x)$ ont les mêmes racines (avec multiplicité).

Montrer que a) implique b). Est-ce que b) implique a)? (Justifiez votre réponse)

Solution. *i) Si le polynôme $p(x)$ divise chaque $f(x) \in K[x]$, alors il divise aussi les polynômes de degré zéro, ce qui implique que lui-même doit avoir degré zéro, c'est-à-dire $p(x) = a$ pour un élément $a \neq 0$ de K.*

Pour l'autre direction on doit montrer que si $p(x) = a$ pour un élément $a \neq 0$ de K, alors $p(x)$ divise chaque $f(x) \in K[x]$. Ceci est évident car K est un corps.

ii) On montre d'abord que a) implique b). On sait que $f(x) = ag(x)$, avec $a \in K$. Si α est une racine de $g(x)$ avec multiplicité m alors $(x-\alpha)^m | g(x)$. Mais ça implique que $(x-\alpha)^m | ag(x) = f(x)$, et donc que α est aussi une racine de $f(x)$ avec multiplicité aux moins m. Si on a une racine de $f(x)$ avec multiplicité m, et on veut montrer que elle est aussi racine pour $g(x)$ avec une multiplicité aux moins m, la démonstration est similaire.

b) n'implique pas a). Ça on voit, par exemple en construisant deux polynômes $p_1(x) \neq p_2(x)$ sur K de degré au moins 2 qui n'ont pas de racines. Les polynômes $x \cdot p_1(x) \neq x \cdot p_2(x)$ ont seulement une racine, notamment 0 avec multiplicité 1.

Par exemple un peut choisir $K = \mathbb{Q}$, $p_1(x) = x^2 - 2$ et $p_3(x) = x^2 - 3$ sur $\mathbb{Q}$. (Ce sont des polynômes irréductibles mêmes, parce qu'ils n'ont pas de racines et sont de degré 2.) Mais $x \cdot p_1(x) \neq a \cdot x \cdot p_2(x)$ pour chaque $a \in K$.

Exercice 3. Factoriser $f(x) \in K[x]$ en polynômes irréductibles.

a) $f(x) = 3x^4 + 2$, $K = \mathbb{Z}_5$.

b) $f(x) = 3x^4 + 2$, $K = \mathbb{Z}_{11}$.

c) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$, $K = \mathbb{Z}_7$.

d) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$, $K = \mathbb{Z}_3$.

e) $f(x) = x^4 - x^2 + x - 1$, $K = \mathbb{Z}_{13}$.

f) $f(x) = x^4 - x^2 + x - 1$, $K = \mathbb{Z}_{17}$.

Solution. *a) On vérifie si $f(x) = 3x^4 + 2$ a des racines en $\mathbb{Z}_5$. On commence avec 0: $f(0) = 2$ et donc 0 n'est pas racine. En suite, $f(1) = 5 = 0$ et donc 1 est racine. Alors on sait que $(x - 1)$ divise $f(x)$. On fait la division sur $\mathbb{Z}_5$ et on trouve que $f(x)/(x-1) = 3x^3+3x^2+3x+3$. On continue et on trouve que 2 est une racine pour $3x^3+3x^2+3x+3$. Alors on divise pour $(x - 2)$. En continuant ainsi, on arrive à la factorisation finale de $f(x)$ qui est $f(x) = 3(x+4)(x+3)(x+2)(x+1)$.*

b) $f(x) = 3(x^2 + 5)(x + 4)(x + 7)$

c) $f(x) = (x+5)(x+3)(x+1)$

d) $f(x) = (x+1)(x+2)^2$

e) $f(x) = (x+12)(x+11)(x^2+3x+6)$

f) $f(x) = (x+3)(x+16)(x^2+15x+6)$

Exercice 4. Calculer $\gcd(f,g)$ et $p,q \in F[x]$ t.q. $\gcd(f,g) = p \cdot f + q \cdot g$:

1. $f(x) = x^2+2$, $g(x) = x^3+4x^2+x+1$, $K = \mathbb{Z}_5$
2. $f(x) = x^2+1$, $g(x) = x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$, $K = \mathbb{Z}_2$
3. $f(x) = x^2-x-2$, $g(x) = x^5-4x^3-2x^2+7x-6$, $K = \mathbb{Q}$.

Solution. *1. On utilise l'algorithme d'Euclide pour calculer le* $\gcd(f,g)$ *et les coefficients* p,q. *On commence par diviser* $g(x)$ *par* $f(x)$. *On trouve que*

$$(x^3+4x^2+x+1) = (x^2+2)(x+4)+(4x+3).$$

En suite, on divise x^2+2 *par le reste de la première division, c'est-à-dire par* $(4x+3)$. *On trouve que*

$$(x^2+2) = (4x+3)(4x+2)+1.$$

Alors on a que $\gcd(f,g) = 1$ *et que* $(x+3)(x^3+4x^2+x+1)+(x^2+2)(4x^2+3x+4) = 1$.

2. On trouve que $\gcd(f,g) = x+1$ *et que* $(x^3+x^2)(x^2+1)+(1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1) = x+1$

3. On trouve que $\gcd(f,g) = x-2$ *et que*

$$(-1/4x^3-1/4x^2+1/4x+1/4)(x^2-x-2)+(1/4)(x^5-4x^3-2x^2+7x-6) = x-2$$

.

Exercice 5. (*) Soit $f(x) \in \mathbb{R}[x] \setminus \{0\}$, $\deg(f) \geq 2$.

i) Montrer que si $\deg(f)$ est impair, alors $f(x)$ n'est pas irréductible.

ii) Montrer, à l'aide du théorème fondamental de l'algèbre[1], que si $f(x)$ est irréductible, alors $\deg(f) = 2$.

Solution.

[1] Chaque polynôme $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, $\deg(f) \geq 1$ possède au moins une racine complexe.