

Algèbre linéaire avancée II
printemps 2022

Série 4

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. (+) Soient $V = \mathbb{R}_n[t]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus n sur \mathbb{R} , $a \in \mathbb{R}$, $B = \{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ une base et $v = (1, a, a^2, \dots, a^n)^\top \in \mathbb{R}^{n+1}$. Montrer que pour $p \in V$, on a $v^\top [p]_B = p(a)$, où $p(x) \in \mathbb{R}$ est l'évaluation de p en $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. Soient K un corps et n un entier positif. Montrer que la matrice $A \in K^{n \times n}$, donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & -\alpha_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

a le polynôme caractéristique $p_A(t) = (-1)^n(t^n + \alpha_{n-1}t^{n-1} + \dots + \alpha_1t + \alpha_0)$.

Exercice 3. Soit $A \in K^{n \times n}$ une matrice triangulaire inférieure, c-à-d

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de A est $\{a_{11}, \dots, a_{nn}\}$.
2. Est-ce que A est diagonalisable ?
3. Est-ce que les deux matrices suivantes sont semblables ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 4. Soit V un espace vectoriel sur un corps K de dimension finie, et $f : V \mapsto V$ un endomorphisme. Soit $p : V \mapsto V$ un automorphisme, c-a-d un endomorphisme inversible. Montrer que $\lambda \in K$ est une valeur propre de f si et seulement si λ est une valeur propre de l'endomorphisme $p^{-1} \circ f \circ p$.

Exercice 5.

1. Vérifier le Théorème de Cayley–Hamilton sur la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

2. Soient K un corps, et $A \in K^{2 \times 2}$. Soit $p_A(t) = t^2 + a_1 t + a_0$ avec $a_0 \neq 0$. Calculer l'inverse de A à l'aide du Théorème de Cayley–Hamilton.
3. Considérer le Théorème de Cayley–Hamilton. On pourrait penser qu'il est possible d'utiliser l'argument $p_A(A) = \det(A \cdot I_n - A) = 0$ pour montrer le théorème. Montrer que ce raisonnement est faux.

Exercice 6. Déterminer pour quelles valeurs du couple (a, b) la matrice

$$X = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & b \\ a & b & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \quad a, b \in \mathbb{R}, ab \neq 0,$$

est diagonalisable.

Exercice 7. (*) Soient K un corps, et $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ les valeurs propres d'une matrice $A \in K^{n \times n}$ et m_1, \dots, m_r leurs multiplicités algébriques. Soit $m_1 + \dots + m_r = n$.

Définition: La *trace* de A est définie par $\text{Tr}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

Démontrer les assertions suivantes:

- i) $\det(A) = \prod_{i=1}^r \lambda_i^{m_i}$
- ii) Si $p_A(\lambda) = \alpha_n \lambda^n + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0$, montrer que $\alpha_{n-1} = (-1)^{n-1} \text{Tr}(A)$.
- iii) $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^r m_i \lambda_i$