EPFL - Printemps 2022	Prof. Z. Patakfalvi
Anneaux et Corps	**Exercices**
Solutions 4	

Exercice 1. 1. $(0) \subset \mathbb{Z}$ est premier car $\mathbb{Z}$ est intègre (Proposition 1.5.2), non maximal car $(0) \subsetneq (2)$.

2. $(t) \subset \mathbb{Z}[t]$ est premier car le quotient $\mathbb{Z}$ est intègre, non maximal car $(t) \subsetneq (t, 2) \neq \mathbb{Z}[t]$.
3. $(t) \subset \mathbb{R}[t]$ est premier et maximal car le quotient est un corps.
4. $(101) \subset \mathbb{Z}[t]$ est premier. En effet, considérons l'homomorphisme
$$\xi\colon \mathbb{Z}[t] \longrightarrow (\mathbb{Z}/101\mathbb{Z})[t], \quad \sum_i a_i t^i \mapsto \sum_i [a_i]_{101} t^i.$$
Il est clair que $f(t) = \sum_i a_i t^i \in \ker \xi$ si et seulement si $[a_i]_{101} = 0$ pour chaque i, donc si et seulement si 101 divise chaque coefficient, donc si et seulement 101 divise $f(t)$. Cela prouve que $\ker \xi = (101)$. Pour conclure, il suffit de montrer que $(\mathbb{Z}/101\mathbb{Z})[t]$ est un anneau intègre. Puisque 101 est un nombre premier, $\mathbb{Z}/101\mathbb{Z}$ est un anneau intègre. De manière générale, si A est un anneau intègre alors $A[t]$ est aussi intègre (la preuve est un bon exercice), ce qui conclut.
5. $(42) \subset \mathbb{Z}[t]$ n'est pas premier car $6 \cdot 7 = 42$, donc non maximal.
6. $(t^2 - 2) \subset \mathbb{Z}[t]$ est premier. En effet, considérons l'homomorphisme d'évaluation
$$\mathrm{ev}_{\sqrt{2}}\colon \mathbb{Z}[t] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \sqrt{2}.$$
On montre comme dans l'Exemple 1.4.18 que $\ker \mathrm{ev}_{\sqrt{2}} = (t^2 - 2)$. Comme $\mathbb{Z}[t]/(t^2 - 2)$ est isomorphe à un sous-anneau de $\mathbb{R}$, c'est un anneau intègre, et donc $(t^2 - 2)$ est premier.
Ce n'est pas un ideal maximal, puisque $(t^2 - 2) \subsetneq (t^2 - 2, 3) \neq \mathbb{Z}[t]$. Alternativement, on peut vérifier que $\mathrm{im}\, \mathrm{ev}_{\sqrt{2}} = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ n'est pas un corps (par exemple 3 n'a pas d'inverse).
7. $(t^2 - 2) \subset \mathbb{R}[t]$ n'est pas premier car $t^2 - 2 = (t - \sqrt{2})(t + \sqrt{2})$ dans $\mathbb{R}[t]$.
8. $(t + 5, 10) \subset \mathbb{Z}[t]$ n'est pas premier car $10 = 2 \cdot 5$.
9. $(t + 5, 11) \subset \mathbb{Z}[t]$ est maximal (donc premier) car le quotient est le corps $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$.
10. $(t^2 + 1, 2) \subset \mathbb{Z}[t]$ n'est pas premier car $(t + 1)^2 = t^2 + 1 + 2t \in (t^2 + 1, 2)$.

Exercice 2. 1. Le premier système n'a pas de solutions. En effet, si $x = 7 + 12k$, alors $x = 1 + 3 \cdot (2 + 4k)$, ce qui contredit $x \equiv 2 \pmod 3$.
Le second système admet une infinité de solutions. En effet, si $x = 8 + 12k$, alors $x = 2 + 3 \cdot (2 + 4k)$. Donc le système est équivalent à $x \equiv 8 \pmod{12}$, qui admet une infinité de solutions.

2. Pour voir que $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z} \ncong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ on peut par exemple utiliser le fait que le deuxième anneau n'est pas cyclique en tant que groupe abélien : tout élément est d'ordre un diviseur de 12.

Exercice 3. 1. Prenons $x \in f^{-1}(I)$. Alors $f(x) \in I$ et, par définition de I, on peut écrire
$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i b_i, \quad \text{pour certains } \beta_i \in B.$$
Puisque f est surjective, on peut choisir des $\alpha_i \in A$ tels que $f(\alpha_i) = \beta_i$. Posons
$$x' := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i.$$

Par construction $f(x) = f(x')$, et donc $x - x' \in \ker f$. Ainsi il existe des $\gamma_i \in A$ tels que

$$x - x' = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i a_i$$

et cette égalité se réarrange en

$$x = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i a_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i \in (a_1, \ldots, a_m, c_1, \ldots, c_n).$$

Comme x est arbitraire, cela montre que $f^{-1}(I) \subseteq (a_1, \ldots, a_m, c_1, \ldots, c_n)$. L'inclusion inverse est immédiate, puisque

$$f(a_i), f(c_j) \in I \quad \forall i, j.$$

On a donc démontré l'égalité désirée.

2. L'Exemple 1.4.10.a montre que $\ker \mathrm{ev}_b = (y - b)$ et $\ker \mathrm{ev}_a = (x - a)$. Puisque $\ker \xi = \mathrm{ev}_b^{-1}(\ker \mathrm{ev}_a)$ (l'égalité est facile à vérifier), par le point précédent on obtient que $\ker \xi = (x - a, y - b)$.

   Puisque $\xi(\lambda) = \lambda$ pour tout $\lambda \in k$, on voit que ξ est surjective. Par le premier théorème d'isomorphisme, on obtient $k \cong k[x, y]/\ker \xi$. Par la Proposition 1.5.5, on obtient que $\ker \xi$ est un idéal maximal.

Exercice 4.

Nota bene : la discussion des deux derniers points de cet exercice pourra être grandement simplifiée une fois à disposition les propriétés des polynômes irréductibles.

1. Par l'Exemple 1.4.18 on a $\mathbb{Z}[i] \cong \mathbb{Z}[t]/(t^2 + 1)$. Par la Proposition 1.4.41 on a

$$\mathbb{Z}[i]/(p) \cong \frac{\mathbb{Z}[t]/(t^2+1)}{p \cdot (\mathbb{Z}[t]/(t^2+1))} \cong \mathbb{Z}[t]/(p, t^2+1) \cong \frac{\mathbb{Z}[t]/(p)}{(t^2+[1]_p) \cdot (\mathbb{Z}[t]/(p))} \cong \mathbb{F}_p[t]/(t^2 + [1]_p).$$

2. Dans le cas où $p = 5$, on remarque que $[2]_5$ et $[3]_5$ sont des racines de $t^2 + [1]_5 \in \mathbb{F}_5[t]$. En particulier on a la factorisation

$$t^2 + [1]_5 = (t - [2]_5) \cdot (t - [3]_5). \tag{1}$$

   Remarquez que $(t - [2]_5) - (t - [3]_5) = [1]_p$. Donc les idéaux générés respectivement par $t - [2]_5$ et par $t - [3]_5$ sont premiers entre eux. Le théorème des restes chinois (Théorème 1.4.50) donne alors

$$\frac{\mathbb{F}_5[t]}{(t - [2]_5) \cap (t - [3]_5)} \cong \frac{\mathbb{F}_5[t]}{(t - [2]_5)} \times \frac{\mathbb{F}_5[t]}{(t - [3]_5)}. \tag{2}$$

   L'évaluation en $t = [2]_5$ induit un ismorphisme

$$\mathbb{F}_5 \cong \frac{\mathbb{F}_5[t]}{(t - [2]_5)}$$

   et d'une manière similaire on a

$$\mathbb{F}_5 \cong \frac{\mathbb{F}_5[t]}{(t - [3]_5)}.$$

   On prétend pour finir que $(t - [2]_5) \cap (t - [3]_5) = (t^2 + [1]_5)$. L'inclusion $\supseteq$ est claire, en vue de la factorisation (1). Inversément, prenons un élément $f(t)$ appartenant à l'intersection des deux idéaux. On peut écrire

$$(t - [2])g(t) = f(t) = (t - [3])h(t)$$

pour certains $g(t), h(t) \in \mathbb{F}_5[t]$. Considérons l'image de $f(t)$ par l'évaluation $\mathrm{ev}_{[2]}$ en $t = [2]$. On a

$$\mathrm{ev}_{[2]}(f(t)) = \mathrm{ev}_{[2]}((t - [2])g(t)) = 0$$

d'une part, et

$$\mathrm{ev}_{[2]}(f(t)) = \mathrm{ev}_{[2]}((t - [3])h(t)) = -\,\mathrm{ev}_{[2]}(h(t))$$

d'autre part. Ainsi $\mathrm{ev}_{[2]}(h(t)) = 0$, et puisque $\ker \mathrm{ev}_{[2]} = (t - [2])$ on en déduit que $h(t) = (t - [2])j(t)$ pour un certain $j(t) \in \mathbb{F}_5[t]$. On peut ainsi écrire

$$f(t) = (t - [3])(t - [2])j(t) = (t^2 + [1])j(t)$$

ce qui montre que $f(t) \in (t^2 + [1])$.
En combinant tout cela dans (2), on obtient

$$\frac{\mathbb{F}_5[t]}{(t^2 + [1])} \cong \mathbb{F}_5 \times \mathbb{F}_5,$$

ce qui implique que $\mathbb{Z}[i]/(5) \cong \mathbb{F}_5 \times \mathbb{F}_5$ en vue du point précédent.

3. On prétend qu'*il existe un isomorphisme* $\mathbb{Z}[i]/(p) \cong \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p$ *si et seulement si* -1 *possède deux racines carrées distinctes modulo* p.
Supposons d'abord que l'on puisse écrire $a^2 = [-1]_p = b^2$ dans $\mathbb{F}_p$ avec $a \neq b$. Puisque $\ker \mathrm{ev}_a = (t - a)$, on peut écrire

$$t^2 + [1]_p = (t - a)(t - b')$$

et on prétend que $b' = b$. En effet,

$$\mathbb{F}_p \ni 0 = b^2 + [1] = \mathrm{ev}_b(t^2 + [1]) = \underbrace{(b - a)}_{\neq 0}(b - b')$$

et comme $\mathbb{F}_p$ est intègre, on obtient que $b - b' = 0$. De plus, $(t - a) - (t - b) = b - a \neq 0$ est un élément inversible de $\mathbb{F}_p$, donc les idéaux $(t - a)$ et $(t - b)$ sont premiers entre eux. En appliquant le théorème des restes chinois comme dans la partie précédente, on trouve que

$$\frac{\mathbb{F}_p[t]}{(t - a) \cap (t - b)} \cong \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p.$$

Puisque $b - a \neq 0$ est inversible dans $\mathbb{F}_p$, on obtient comme dans le point précédent que $(t - a) \cap (t - b) = (t^2 + [1])$ (où l'on avait utilisé que $[2]_5 - [3]_5 = -[1]_5$ est inversible dans $\mathbb{F}_5$), et donc que

$$\mathbb{Z}[i]/(p) \cong \frac{\mathbb{F}_p[t]}{(t^2 + [1])} \cong \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p.$$

Remarquons si $a \in \mathbb{F}_p$ est une racine carrée de $[-1]_p$, alors $-a$ en est aussi une. Or si $p \neq 2$ on a $a \neq -a$. Il nous reste ainsi à traiter deux cas : celui de $p = 2$, et celui où $[-1]_p$ n'a pas de racine carrée dans $\mathbb{F}_p$.
Commençons avec le cas $p = 2$. Alors $t^2 + [1]_2 = (t + [1]_2)^2$, et ainsi il existe un élément $0 \neq x$ de $\mathbb{F}_2[t]/(t^2 + [1])$ tel que $x^2 = 0$ (on dit que cet anneau quotient est *non-réduit*) : on peut prendre x comme étant l'image de $t + [1]_2$ dans le quotient. Or il n'existe pas d'élément non-nul dans $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$ satisfaisant une telle propriété, donc il ne peut y avoir d'isomorphisme entre ces deux anneaux.
Pour finir, supposons qu'il n'existe pas de racine carrée de -1 dans $\mathbb{F}_p$. On prétend que $\mathbb{F}_p[t]/(t^2 + [1])$ est un anneau intègre. Fixons une clotûre algébrique $\overline{\mathbb{F}_p}$ de $\mathbb{F}_p$, et choisissons une racine carrée $i \in \overline{\mathbb{F}_p}$ de -1. On considère l'homomorphisme d'évaluation

$$\mathrm{ev}_i \colon \mathbb{F}_p[t] \longrightarrow \overline{\mathbb{F}_p}, \quad t \mapsto i.$$

Puisque $\mathbb{F}_p[t]/\ker \mathrm{ev}_i \cong \mathrm{im}\, \mathrm{ev}_i \subset \overline{\mathbb{F}_p}$ et que $\overline{\mathbb{F}_p}$ est intègre, on voit que $\mathbb{F}_p[t]/\ker \mathrm{ev}_i$ est un anneau intègre. On prétend que $\ker \mathrm{ev}_i = (t^2 + [1]_p)$. L'argument est le similaire à celui de l'Exemple 1.4.18. Pour finir, on prétend que $\mathbb{F}_p[t]/(t^2 + [1])$ n'est pas isomorphe à $\mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p$: en effet, cet anneau produit n'est pas intègre.

Exercice 5.
Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $A \times B$. Puisque

$$(1,0) \cdot (0,1) = (0,0) \in \mathfrak{p}$$

on a $(0,1) \in \mathfrak{p}$ ou $(1,0) \in \mathfrak{p}$. Supposons que $(0,1) \in \mathfrak{p}$ et considérons l'ensemble

$$\mathfrak{q} := \{a \in A \mid \exists b \in B : (a,b) \in \mathfrak{p}\} \subset A.$$

On prétend que $\mathfrak{q}$ est un idéal premier et que $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \times B$.

1. Montrons que $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \times B$. L'inclusion $\subseteq$ est claire. Inversément, prenons $a \in \mathfrak{q}$ et $b \in B$. Par construction de $\mathfrak{q}$, il existe $b' \in B$ tel que $(a, b') \in \mathfrak{p}$. Alors $(a,0) = (1,0)(a,b') \in \mathfrak{p}$. Puisque $(0,1) \in \mathfrak{p}$, on a aussi $(0,b) = (0,b) \cdot (0,1) \in \mathfrak{p}$. Ainsi $(a,b) = (a,0) + (0,b) \in \mathfrak{p}$. Ceci établit l'inclusion $\supseteq$.
2. Si $a, a' \in \mathfrak{q}$, il existe $b, b' \in B$ tels que (a,b) et (a',b') sont des éléments de $\mathfrak{p}$. Donc $(a,b) + (a',b') = (a+a', b+b') \in \mathfrak{p}$, et ainsi $a + a' \in \mathfrak{q}$. Donc $\mathfrak{q}$ est stable par addition.
   Gardons $a \in \mathfrak{q}$ avec $(a,b) \in \mathfrak{p}$, et prenons $x \in A$. Alors $(a,b) \cdot (x,0) = (ax, 0) \in \mathfrak{p}$. Donc $ax \in \mathfrak{q}$. Donc $\mathfrak{q}$ est stable par multiplication avec des éléments de A.
   On a obtenu que $\mathfrak{q}$ est un idéal de A. Montrons que c'est un idéal premier. Prenons $x, x' \in A$ tels que $xx' \in \mathfrak{q}$. Par le point précédent, cela implique que $(x,0)(x',0) = (xx',0) \in \mathfrak{p}$. Puisque $\mathfrak{p}$ est premier, on en déduit que $(x,0)$ ou $(x',0)$ appartient à $\mathfrak{p}$, et donc que x ou x' appartient à $\mathfrak{q}$. Ainsi $\mathfrak{q}$ est premier.

Dans le cas où $(1,0) \in \mathfrak{p}$, un argument similaire montre que $\mathfrak{p} = A \times \mathfrak{q}'$, où $\mathfrak{q}' \subset B$ est un idéal premier.

1 Exercice supplémentaire

Cet exercice était l'exercice bonus de l'année 2021 (l'exercice ne sera pas dans l'examen).

Exercice 6.
Pour simplifier les notations, nous écrivons $\partial := \frac{\partial}{\partial x}$.

1. On prétend que
$$\theta(x^j) = \sum_{i=0}^{j-1} m_{x^i} [\theta, m_x](x^{j-1-i}) + m_{x^j} \theta(1) \quad \forall j \geq 0.$$
   Prouvons cette égalité par récurrence sur j. Pour $j = 0$ elle est trivialement vraie. Si $j > 0$, on a
$$\begin{aligned}
\theta(x^j) &= \theta m_x(x^{j-1}) \\
&= [\theta, m_x](x^{j-1}) + m_x \theta(x^{j-1}) \\
&= [\theta, m_x](x^{j-1}) + m_x \sum_{i=0}^{j-2} m_{x^i}[\theta, m_x](x^{j-2-i}) + m_x m_{x^{j-1}} \theta(1) \\
&= [\theta, m_x](x^{j-1}) + \sum_{i=0}^{j-2} m_{x^{i+1}}[\theta, m_x](x^{j-2-i}) + m_{x^j} \theta(1) \\
&\overset{r=i+1}{=} [\theta, m_x](x^{j-1}) + \sum_{r=1}^{j-1} m_{x^r}[\theta, m_x](x^{j-1-r}) + m_{x^j} \theta(1) \\
&= \sum_{r=0}^{j-1} m_{x^r}[\theta, m_x](x^{j-1-r}) + m_{x^j} \theta(1).
\end{aligned}$$

La même formule s'obtient avec θ' à la place de θ. Puisque $[\theta, m_x] = [\theta', m_x]$, on obtient que

$$\theta(x^j) - m_{x^j}\theta(1) = \theta'(x^j) - m_{x^j}\theta'(1)$$

et donc que $(\theta - \theta')(x^j) = x^j(\theta(1) - \theta'(1))$. Ecrivons $\lambda := \theta(1) - \theta'(1) \in K[x]$. Par K-linéarité, on a

$$(\theta - \theta')(p(x)) = \lambda p(x) \quad \forall p(x) \in K[x]$$

ce qui prouve que $\theta = \theta' + m_\lambda$.

2. Si θ est tel que dans la donnée, alors par l'Exercice 6 on a $[\partial^i, m_x] = [\theta, m_x]$ et donc $\theta = \partial + m_\lambda$ par le point précédent.
3. Nous allons prouver que

$$D_{\leq n}(K[x]) = \left\{ \sum_{r=0}^{n} m_{p_r(x)}\partial^r \mid p_r(x) \in K[x] \right\},$$

où la somme est comprise comme l'élément nul si elle est vide. Procédons par double-inclusion, et commençons avec l'inclusion $\supseteq$. Si $p(x) \in K[x]$ et $\theta \in D_{\leq n}(K[x])$, on prétend que $m_{p(x)}\theta \in D_{\leq n}(K[x])$. Puisque

$$[m_{p(x)}\theta, m_{q(x)}] = m_{p(x)} \cdot [\theta, m_{q(x)}],$$

on voit que par réccurence il suffit de prouver le cas $n = 0$, et dans ce cas le crochet est nul. Par l'Exercice 6.3 on en déduit que $m_{p(x)}\partial^i \in D_{\leq n}(K[x])$ pour $i \leq n$. La première inclusion s'ensuit.

Prouvons l'inclusion inverse. Nous procédons par récurrence sur n. Cette inclusion est vraie par définition pour $n \leq 0$. Supposons $n > 0$ et prenons $\theta \in D_{\leq n}(K[x])$. Alors $[\theta, m_x] \in D_{\leq n-1}(K[x])$, donc par récurrence on peut écrire

$$[\theta, m_x] = \sum_{r=0}^{n-1} m_{p_r(x)}\partial^r \quad \text{pour certains } p_r(x) \in K[x].$$

Nous allons construire un opérateur différentiel de la forme souhaitée, dont le crochet de Lie avec m_x est égal à $[\theta, m_x]$. Pour cela, il nous faut comprendre comment $[\cdot, m_x]$ agit sur les opérateurs de la forme voulue. Le calcul suivant, qui utilise l'Exercice 6.1, répond à cette question :

$$\begin{aligned}
\left[\sum_r m_{q_r}\partial^r, m_x\right] &= \sum_r [m_{q_r}\partial^r, m_x] \\
&= \sum_r m_{q_r}\partial^r m_x - m_x m_{q_r}\partial^r \\
&= \sum_r m_{q_r}(r\partial^{r-1} + m_x\partial^r) - m_x m_{q_r}\partial^r \\
&= \sum_r r m_{q_r}\partial^{r-1}
\end{aligned}$$

Posons

$$\theta' := \sum_{r=0}^{n-1} \frac{m_{p_r(x)}}{r+1}\, \partial^{r+1},$$

le calcul précédent montre que $[\theta, m_x] = [\theta', m_x]$ et donc $\theta = \theta' + m_\lambda$ pour un certain $\lambda \in K$ par le premier point. Cela prouve que θ est de la forme recherchée.

4. Commençons par remarquer que si $I \subset D(K[x])$ est un idéal bilatère, si $f \in I$ et $g \in D(K[x])$, alors $[f, g]$ et $[g, f]$ appartiennent à I.

   Donc si $0 \neq \sum_{r=0}^{n} m_{p_r} \partial^r \in I$ avec $p_n \neq 0$, le calcul du point précédent implique qu'en appliquant n fois de suite $[\cdot, m_x]$ à $\sum_{r=0}^{n} m_{p_r} \partial^r$, on trouve $m_{n! \cdot p_n} \in I$. Il suffit donc de montrer qu'un idéal bilatère qui contient un élément de la forme $m_{p(x)}$, est en fait égal à $D(K[x])$.

   Ecrivons $p(x) = \sum_{r=0}^{s} a_r x^r$, avec $a_s \neq 0$. Par l'Exercice 8.3 de la série 3, en appliquant s fois $[\partial, \cdot]$ à $m_{p(x)}$ on obtient $m_{s! a_s} \in I$. Puisque $0 \neq s! a_s \in K$, on voit que I contient un élément inversible, donc que $I = D(K[x])$.

L'hypothèse sur la caractéristique de K est utilisée dans les deux derniers points, pour pouvoir diviser par $r + 1$ et dire que $s! a_s \neq 0$, donc que $m_{s! a_s}$ est inversible.

Exercice 7.
Pour simplifier la notation, nous écrirons $\partial := \frac{\partial}{\partial x}$.

1. Procédons par récurrence sur i. Le cas $i = 1$ a été prouvé dans l'Exercice 8.2 de la série 3. Si $i > 1$, on a

$$\begin{aligned} [\partial^i, m_x] &= \partial^i m_x + (-m_x \partial^{i-1}) \partial \\ &= \partial^i m_x + \left([\partial^{i-1}, m_x] - \partial^{i-1} m_x\right) \partial \\ &= \partial^i m_x + (i-1)\partial^{i-2}\partial + \partial^{i-1}(-m_x \partial) \\ &= \partial^i m_x + (i-1)\partial^{i-1} + \partial^{i-1}([\partial, m_x] - \partial m_x) \\ &= i\partial^{i-1} \end{aligned}$$

   où l'on a utilisé l'hypothèse de récurrence pour $i - 1$ et $i = 1$.

2. Ecrivons $B_{i,j} := [\partial^i, m_{x^j}]$. On a, en utilisant le point précédent :

$$\begin{aligned} B_{i,j} &= \partial^i m_{x^j} + m_{x^{j-1}}(-m_x \partial^i) \\ &= \partial^i m_{x^j} + m_{x^{j-1}}([\partial^i, m_x] - \partial^i m_x) \\ &= \partial^i m_{x^j} + i m_{x^{j-1}} \partial^{i-1} - m_{x^{j-1}} \partial^i m_x \\ &= i m_{x^{j-1}} \partial^{i-1} + (\partial^i m_{x^{j-1}} - m_{x^{j-1}} \partial^i) m_x \\ &= i m_{x^{j-1}} \partial^{i-1} + B_{i,j-1} m_x \end{aligned}$$

   et cela établit immédiatement la formule indiquée dans la donnée.

3. On raisonne une fois de plus par récurrence sur i. On a montré que $\partial \in D_{\leq 1}(K[x])$ dans l'Exercice 8 de la série 3. Supposons $i > 1$. Par linéarité du crochet de Lie dans sa seconde variable, pour montrer que ∂^i est de degré au plus i il suffit de montrer que $[\partial^i, m_{x^j}]$ est de degré au plus $i - 1$ pour chaque $j \geq 0$. La formule démontrée au point précédent donne

$$[\partial^i, m_{x^j}] = i \sum_{r=0}^{j-1} m_{x^r} \partial^{i-1} m_{x^{j-1-r}}.$$

   Par linéarité du crochet de Lie dans sa première variable, il suffit ainsi de montrer que chaque $m_{x^r} \partial^{i-1} m_{x^{j-1-r}}$ est de degré au plus $i - 1$. Remarquez que

$$[m_{x^r} \partial^{i-1} m_{x^{j-1-r}}, m_{x^s}] = m_{x^r} [\partial^{i-1}, m_{x^s}] m_{x^{j-1-r}} \quad \forall s$$

   et par hypothèse de récurrence, $[\partial^{i-1}, m_{x^s}]$ est de degré au plus $i - 2$ pour tout s. Ceci implique que $m_{x^r}[\partial^{i-1}, m_{x^s}] m_{x^{j-1-r}}$ est de degré au plus $i - 2$, ce qui entraîne finalement que $m_{x^r} \partial^{i-1} m_{x^{j-1-r}}$ est de degré au plus $i - 1$, comme souhaité.