Prof. Friedrich Eisenbrand 11 mars 2021

Algèbre linéaire avancée II
printemps 2022

Série 3 – Corrigé

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1.

1. (+) Soit V un espace vectoriel réel et soit $B = \{v_1, \ldots, v_4\}$ une base de V. Soit f l'endomorphisme défini par

$$f(v_1) = v_1 - v_2, f(v_2) = 2v_2 - 6v_3, f(v_3) = -2v_1 + 2v_2, f(v_4) = v_2 - 3v_3 + v_4.$$

Écrivez la matrice A_B de l'application f dans la base $B = \{v_1, \ldots, v_4\}$. Est-ce que f est inversible? Si oui, écrivez la matrice A_B^{-1} de l'application inverse $f^{-1} : V \longrightarrow V$.

2. Maintenant, soit g un autre endomorphisme défini par

$$g(v_1) = v_1 + 2v_2, g(v_2) = v_3 + v_4, g(v_3) = v_1 + v_2 + v_3, g(v_4) = 3v_2 - 2v_3.$$

Écrivez la matrice C_B de l'application g dans la base $B = \{v_1, \ldots, v_4\}$. Est-ce que g est inversible? Si oui, écrivez la matrice C_B^{-1} de l'application inverse $g^{-1} : V \longrightarrow V$.

3. Maintenant soit $B' = \{w_1, \ldots, w_4\}$ une autre base de V telle que

$$v_1 = w_1 + w_2, v_2 = w_3 + w_4, v_3 = w_1 + w_2 + w_3, v_4 = w_2 + w_4.$$

Écrivez la matrice $P_{BB'}$ de changement de base, c.à.d. $[v]_{B'} = P_{BB'}[v]_B$. Écrivez la matrice $A_{B'}$ de l'application f dans la base B', et la matrice $C_{B'}$ de l'application g dans la base B'.

Rappel:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & V \\ \downarrow{\scriptstyle \phi_B} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_B} \\ K^n & \xrightarrow{A} & K^n \end{array}$$

Solution. *1.* $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *cette matrice a par colonnes les images des vecteurs de base. Par exemple, la première colonne est l'image de* v_1, *ce qu'on peut voir si on calcule* $A_B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. *Cette matrice a déterminant nul, donc l'inverse n'existe pas.*

2. $C_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C_B^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

3. On écrit la matrice de changement de base P *de* B *a* B'. *On a que* $P = P_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *alors* $P^{-1} = P_{B'B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Finalement, on a que* $A_{B'} = P_{BB'} A_B P_{B'B}$ *et* $C_{B'} = P_{BB'} C_B P_{B'B}$.

Exercice 2. Calculer les valeurs propres et les espaces propres des matrices suivantes sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$ (mais avec $\varphi \in [0, 2\pi) \subseteq \mathbb{R}$ dans le cas 2).

$$1.\,(+) A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad 2.\, A_2 = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \quad 3.\, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 4.\, A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Solution. *1. Le polynôme charactéristique est* $\det(A_1 - \lambda I) = \lambda^2 - 1 = (\lambda+1)(\lambda-1)$. *Pour* $\lambda_1 = 1$, *on a* $A_1 x = x \Leftrightarrow x_1 = x_2$, *et pour* $\lambda_2 = -1$, *on a* $A_2 x = -x \Leftrightarrow x_2 = -x_1$. *Les espaces propres sont alors* $E_1 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ *pour* λ_1, *et* $E_2 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ *pour* λ_2. *Les cas* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *et* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *sont identiques.*

2. $\det(A_2 - \lambda I) = (\cos(\varphi) - \lambda)^2 + \sin^2(\varphi) = \lambda^2 - 2\lambda\cos(\varphi) + 1$. *Pour* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *et* $\varphi \notin \{\pi t \mid t \in \mathbb{Z}\}$, *ce terme n'a pas de racine réelle, c-à-d nous n'avons pas de valeur propre dans* $\mathbb{R}$. *En effet, le discriminant du polynôme caractéristique est* $\Delta = (-2\cos(\varphi))^2 - 4 = 4(\cos(\varphi)^2 - 1) < 0$. *Pour* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *et* $\varphi \in \{\pi t \mid t \in \mathbb{Z}\}$, *nous avons* $A_2 = I$ *et tous les vecteurs non égaux à* 0 *sont vecteurs propres.*

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, *on a* $\lambda_{1,2} = \cos(\varphi) \pm i\sin(\varphi)$. *La valeur propre* λ_1 *est associée à l'espace propre*

$$\sin(\varphi) \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} v_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad E_1 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\}.$$

Similairement, $E_2 = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}\right\}$.

3. $\det(A_3 - \lambda I) = (1-\lambda)^2 \Rightarrow \lambda = 1$. *On calcule*

$$0 = (A_3 - I)v = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v \quad \Leftrightarrow \quad v_2 = 0.$$

Alors, $E_1 = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

4. *On a*

$$\begin{aligned} \det(A_4 - \lambda I) &= (3-\lambda)^2(5-\lambda) + 2 - 2(3-\lambda) - (5-\lambda) \\ &= -\lambda^3 + 11\lambda^2 - 36\lambda + 36 \\ &= (6-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) \end{aligned}$$

Alors, $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 2$ *et*

$$E_1 = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \qquad E_2 = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \qquad E_3 = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Exercice 3. Sachant que $\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = 5$, calculer $\det\begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ g & h & i \\ 4d+3g & 4e+3h & 4f+3i \end{pmatrix}$.

Solution. *On sait que* det *est linéaire dans chaque ligne et qu'il est invariant par ajout d'un multiple d'une ligne* j *à une ligne* $i \neq j$. *Alors,*

$$\det\begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ g & h & i \\ 4d+3g & 4e+3h & 4f+3i \end{pmatrix} = 2\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ 4d+3g & 4e+3h & 4f+3i \end{pmatrix} =$$

$$= 2\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ 4d & 4e & 4f \end{pmatrix} = 8\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{pmatrix} = -8\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = -8 \cdot 5 = -40\,.$$

Exercice 4. Soient V un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$, et $f : V \to V$ un endomorphisme. On dit qu'un sous-espace vectoriel $U \subseteq V$ est *invariant* par f si $f(U) \subseteq U$. Montrer que les espaces propres de $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$ sont invariants par f.

Solution. *Soit* λ *une valeur propre de* f^n, *et* $v_0 \in E_\lambda \setminus \{0\}$. *Pour* $i = 1, \ldots, n$, *soit* $v_i = f(v_{i-1})$.

On a, par example, que $v_1 = f(v_0)$ *et on veut montrer que* $v_1 \in E_\lambda$. *Ceci est vrai parce que:*

$$f^n(v_1) = f^n(f(v_0)) = f^{n+1}(v_0) = f(f^n(v_0)) = f(\lambda v_0) = \lambda f(v_0) = \lambda v_1.$$

En general on a que:

$$f^n(v_k) = f^n(f^k(v_0)) = f^{n+k}(v_0) = f^k(f^n(v_0)) = f^k(\lambda v_0) = \lambda f^k(v_0) = \lambda v_k,$$

où nous utilisons la linéarité de f. Donc, $v_k \in E_\lambda$ aussi, et en particulier $v_1 \in E_\lambda$. Donc, l'espace propre E_λ est invariant par f.

Exercice 5. Déterminer si les matrices suivantes sont diagonalisables.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & \mathrm{i} & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$,

2. $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$,

3. $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$.

Solution. *1. La matrice A est triangulaire supérieure. On sait que les valeurs propres sont les éléments diagonaux : $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \mathrm{i}$, $\lambda_3 = -1$. Les valeurs propres sont toutes distinctes les unes des autres, donc la matrice A est diagonalisable.*

2. Les valeurs propres de B sont les zéros du polynôme caractéristique

$$\begin{aligned} p_B(t) = \det(tI_3 - B) &= \det \begin{pmatrix} t-5 & 1 & 1 \\ 1 & t-5 & 1 \\ 1 & 1 & t-5 \end{pmatrix} \\ &= (t-5)^3 + 1 + 1 - (t-5)(1+1+1) \\ &= t^3 - 15t^2 + 72t - 108. \end{aligned}$$

On voit que la matrice $6I_3 - B$ a tous ses éléments égaux à 1, elle est donc singulière. Ainsi, 6 est une racine de p_B. On peut alors factoriser p_B et obtenir

$$p_B(t) = (t-6)(t^2 - 9t + 18) = (t-3)(t-6)(t-6).$$

Les valeurs propres de B sont alors $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 6$. On a $m_{\mathrm{alg}}(3) = 1$ et $m_{\mathrm{alg}}(6) = 2$. D'office on a $m_{\mathrm{geom}}(3) = 1$, mais nous devons encore calculer la dimension de $E_6(B)$ afin de savoir si on a $m_{\mathrm{geom}}(6) = 2$ ou $m_{\mathrm{geom}}(6) = 1$. On a

$$E_6(B) = \ker(6\, I_3 - B) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On voit que $\operatorname{rank}(6I_3 - B) = 1$. *Donc la dimension du noyau est 2, et ainsi $m_{\mathrm{geom}}(6) = 2$. On obtient que $m_{\mathrm{alg}}(\lambda) = m_{\mathrm{geom}}(\lambda)$ pour toutes les valeurs propres λ et donc B est diagonalisable.*

3. *La matrice C a pour polynôme caractéristique*

$$p_C(t) = t^3 - t^2 - t + 1 = (t+1)(t-1)(t-1).$$

Ses valeurs propres sont donc -1 et 1. On obtient $m_{\text{alg}}(-1) = 1 = m_{\text{geom}}(-1)$ et $m_{\text{alg}}(1) = 2$. Par ailleurs,

$$E_1(C) = \ker(I_3 - C) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On voit que $\dim E_1(C) = 1$, et on obtient $m_{\text{geom}}(1) = 1$. Comme $m_{\text{geom}}(1) = 1 \neq 2 = m_{\text{alg}}(1)$, la matrice C n'est pas diagonalisable.

Exercice 6. (*) Une matrice $A \in K^{n\times n}$ est appelée *diagonalisable* si l'endomorphisme $\phi : K^n \mapsto K^n$ défini comme $\phi(x) = Ax$ est diagonalisable.

Démontrer que A est diagonalisable si et seulement s'il existe $U \in K^{n\times n}$ inversible telle que $U^{-1}AU$ est une matrice diagonale.

Solution.