Algèbre linéaire avancée II
printemps 2022

Série 5

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. (+) Soit V un espace vectoriel et soit $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ une base de V. Soit $f : V \times V \to K$ une forme bilinéaire symétrique telle que

$$f(v_1, v_1) = 2, f(v_2, v_2) = 3, f(v_3, v_3) = -1, f(v_1, v_2) = 0, f(v_2, v_3) = 1, f(v_3, v_1) = -2.$$

1. Écrire la matrice A_B^f de la forme bilinéaire f pour la base B.
2. Trouver une base orthogonale $C = \{w_1, w_2, w_3\}$ pour V par rapport à la forme bilinéaire f.

Exercice 2. Soit $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Décidez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. Les matrices A et B sont semblables si et seulement si elles ont le même spectre.

   ☐ True ☐ False

2. Si les matrices A et B ont le même spectre $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ et sont toutes les deux diagonalisables, alors A et B sont semblables.

   ☐ True ☐ False

3. Si $p_A(B) = 0$, alors A et B sont semblables.

   ☐ True ☐ False

4. Si A et B sont semblables, alors $p_A(B) = 0$.

   ☐ True ☐ False

Exercice 3. Soit V de dimension finie et B une base de V. Montrer que deux formes bilinéaires $f, g : V \times V \to K$ sont différentes si et seulement si $A_B^f \neq A_B^g$.

Exercice 4. Soit V de dimension finie et B une base de V. Montrer que une forme bilinéaire $f : V \times V \to K$ est symétrique si et seulement si A_B^f est symétrique.

Exercice 5. Soit $V \subseteq \mathbb{R}_3[x]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 3 sur $\mathbb{R}$ avec le forme bilinéaire

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\mathrm{d}x.$$

1. Décrire la matrice $A_B^{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ pour $B = \{1, x, x^2, x^3\}$.
2. Montrer que l'ensemble $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ de polynômes

$$p_0 = 1 \qquad\qquad p_1 = x$$
$$p_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \qquad\qquad p_3 = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

   est une base orthogonale de V.

Exercice 6. On considère les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ et } v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_2^4.$$

Est-ce que span$\{v_1, v_2, v_3\}$ possède une base orthogonale par rapport à la forme bilinéaire symétrique standard?

Exercice 7. Montrer que la relation de congruence $\cong$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des matrices $K^{n \times n}$.

Rappel: Deux matrices $A, B \in K^{n \times n}$ sont *congruentes* s'il existe une matrice $P \in K^{n \times n}$ inversible telle que $A = P^T B P$.

Exercice 8. (*) Soit V un espace vectoriel sur un corps K et $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon V \times V \to K$ une forme bilinéaire. Soient $E \subseteq V$ et E^* le sous-espace de V engendré par les éléments de E. Montrer $E^\perp = E^{*\perp}$.
Rappel: Pour $W \subseteq V$, $W^\perp = \{v \in V : v \perp w \text{ pour tout } w \in W\}$.